

**Aufgabe 1:** Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x = 1$  an. Wenden Sie diese Formel auf  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

**Aufgabe 2:** • Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

um die Stelle 0 bis zur Ordnung 4, das heißt mit Restglied fünfter Ordnung.

- Welche Regelmäßigkeit lässt sich erkennen? Stellen Sie eine Vermutung für die weiteren Terme der Entwicklung auf.
- Stellen Sie die zu approximierende Funktion  $f$  sowie alle errechneten (und vermuteten) Taylor-Polynome aufsteigender Ordnung graphisch mit Hilfe eines geeigneten Programms dar.

**Aufgabe 3:** Zwischen geographischer Breite  $B$  und reduzierter Breite  $\beta$  besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1 - \varepsilon^2} \tan B),$$

wobei

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen  $a$  und  $b$  ist.

Entwickeln Sie die Differenz  $\beta - B$  nach Potenzen von  $\varepsilon$  mit einem Fehlerterm  $O(\varepsilon^4)$ .

**Anleitung:** Wir definieren  $w := \tan \beta$  und  $w_0 := \tan B$ . Damit läßt sich die Differenz schreiben als

$$\begin{aligned} \beta - B &= \arctan\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} \tan B\right) - B \\ &= \arctan w - \arctan w_0. \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie  $\arctan(w)$  um  $w_0$  bis zum Fehlerterm  $O(|w - w_0|^2)$ .
- Um  $w - w_0$  darzustellen entwickeln Sie  $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$  um den Punkt 0 bis  $O(\varepsilon^4)$ .

**Aufgabe 4:** Differenzieren Sie die Funktion  $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$  numerisch an der Stelle  $x_0 = 3$  mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für  $h = 10^{-1}$ ,  $h = 10^{-2}$ ,  $h = 10^{-3}$ . Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert  $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$ . Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von  $h$  in eine Tabelle ein.