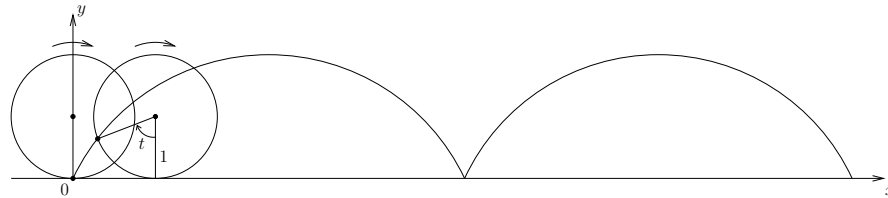


Aufgabe 1: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem ein Kreis von Radius 1 gleichmäßig die x-Achse entlang rollt.



- Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.
- Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0, 0)$ beschreibt.
- Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) addieren.
- Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.
- Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die bei einer Umdrehung des Kreises entsteht.

Tipp: $\cos(t) = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})$

LÖSUNG:

- a) Die Kurve, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Die Kurve, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0, 0)$ beschreibt und im Punkt $(0, -1)$ startet, wird parametrisiert durch

$$\gamma_P(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

- c) Die Parametrisierung der oben abgebildeten Kurve ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \gamma_M(t) + \gamma_P(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

d) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit lässt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + 1} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

e) Für eine Umdrehung des Kreises ist $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} l(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(s)} ds \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos^2(\frac{s}{2}) + \sin^2(\frac{s}{2})} ds \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2(\frac{s}{2})} ds \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin(\frac{s}{2}) ds \quad (\sin(\frac{s}{2}) \geq 0 \text{ für } s \in [0, 2\pi]) \\ &= 2 [-2 \cos(\frac{s}{2})]_0^{2\pi} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10}, \quad t \in [0, T]$$

a) Skizzieren Sie die Kurve.

Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.

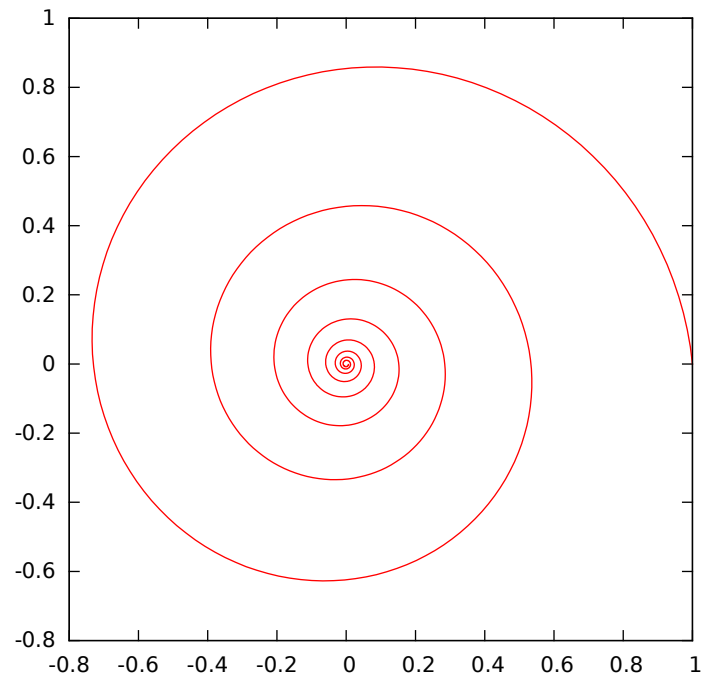
b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.

d) Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \rightarrow \infty$.

LÖSUNG:

a) Es handelt sich um die sogenannte *logarithmische Spirale*:



b) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha t} \cos(t) + e^{\alpha t} - \sin(t) \\ \alpha e^{\alpha t} \sin(t) + e^{\alpha t} \cos(t) \end{pmatrix}$$

und somit lässt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= e^{\alpha t} \sqrt{(\alpha \cos(t) - \sin(t))^2 + (\alpha \sin(t) + \cos(t))^2} \\ &= e^{\alpha t} \sqrt{\alpha^2 \cos^2(t) + \alpha^2 \sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= e^{\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + 1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} l(T) &= \int_0^T \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \sqrt{\alpha^2 + 1} \int_0^T e^{\alpha s} ds \\ &= \sqrt{\alpha^2 + 1} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha s} \right]_0^T \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) \\ &= -\sqrt{101} \left(e^{-\frac{T}{10}} - 1 \right) \end{aligned}$$

d)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} l(T) = \sqrt{101}$$

Aufgabe 3: Betrachten Sie für $a > 0$ folgende Kurve:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(\cos(t))^3 \\ a(\sin(t))^3 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Länge von γ über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 b) Berechnen Sie für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

- c) Skizzieren Sie $\gamma(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $a = 1$.

Tipp: Benutzen Sie hierfür die obigen Grenzwerte, Werte an $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$ sowie Symmetrieüberlegungen.

LÖSUNG:

- a) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -3a \cos^2(t) \sin(t) \\ 3a \sin^2(t) \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich für den Betrag der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{9a^2(\cos^4(t) \sin^2(t) + \sin^4(t) \cos^2(t))} \\ &= \sqrt{9a^2 \cos^2(t) \sin^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} \\ &= 3a \cos(t) \sin(t). \end{aligned}$$

Also ist die Länge

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos(s) \sin(s) ds \\ &= \left[\frac{3}{2}a \sin^2(s)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

- b) Der normierte Geschwindigkeitsvektor ist

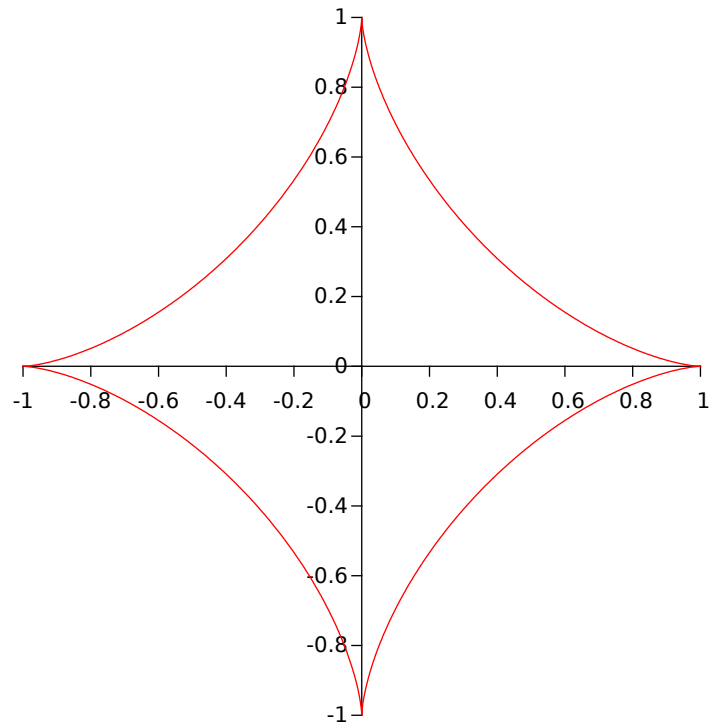
$$\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Also gilt für die Grenzwerte:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Die Werte an den Intervallgrenzen sind $\gamma(0) = (1, 0)$ und $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$. Außerdem ist $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (2^{-\frac{3}{2}}, 2^{-\frac{3}{2}}) \approx (0,35, 0,35)$. Aus obigen Grenzwerten lässt sich

schließen, dass die Kurve für $t \rightarrow 0$ in Richtung der x-Achse und für $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ in Richtung der y-Achse verläuft. Des Weiteren gelten die von der Kreislinie bekannten Symmetrien, da Potenzieren mit 3 die Symmetrieeigenschaften von \sin und \cos nicht verändert. So kann die Kurve in den verbleibenden Quadranten durch Rotation des obigen Stücks erhalten werden.



Aufgabe 4: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

- a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

- b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

- c) Sei

$$R = \frac{6,37 \cdot 10^6}{0,13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin \left(\frac{d}{2R} \right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

- d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

- e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d ?

- f) $L(d) = 2R \arcsin \left(\frac{d}{2R} \right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].

LÖSUNG:

a) $\|B - A\| = d$

b)

$$\bar{\gamma}\left(-\frac{d}{2}\right) = A, \quad \bar{\gamma}\left(\frac{d}{2}\right) = B, \quad \bar{\gamma} \text{ stetig}$$

$$\|\dot{\bar{\gamma}}(t)\| = 1$$

$$\int_{\bar{\Gamma}} 1 \, dl = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 1 \cdot 1 \, dt = \frac{d}{2} - \left(-\frac{d}{2}\right) = d$$

Es handelt sich um die Gerade durch A und B .

c)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(-T) &= M + R \left(\frac{-\sin T}{\sqrt{1 - \sin^2 T}} \right) \\ &= M + R \left(\frac{-\frac{d}{2R}}{\frac{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{R}} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 - R \frac{d}{2R} \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R \frac{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = A, \end{aligned}$$

analog ergibt sich $\tilde{\gamma}(T) = B$ (einziger Unterschied: $+\sin T$ im ersten Schritt).

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \sqrt{0 + R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} 1 \, dl = \int_{-T}^T 1 \cdot R \, dt = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Es handelt sich um einen Kreisbogen mit Radius R von A nach B (Lichtweg bei genügend großer Entfernung von der Erdoberfläche).

d) ...

e) $\tilde{\Gamma}$ ist länger.

Die Längendifferenz ist

$$2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) - d.$$

Für $d = 100$ [m] ergibt sich die Differenz $1,73 \cdot 10^{-11}$ [m] (17 Pikometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich die Differenz $1,73 \cdot 10^{-8}$ [m] (17 Nanometer).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich die Differenz $1,73 \cdot 10^{-5}$ [m] (17 Mikrometer).

Der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\| = \tilde{\gamma}_2(0) = -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R$ ist offensichtlich der maximale Abstand der beiden Kurven.

Für $d = 100$ [m] ergibt sich der Abstand $2,55 \cdot 10^{-5}$ [m] (25 Mikrometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich der Abstand $2,55 \cdot 10^{-3}$ [m] (2,5 Millimeter).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich der Abstand $2,55 \cdot 10^{-1}$ [m] (25 Zentimeter).

f)

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin''(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}$$

$$\arcsin'''(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}^5}$$

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\arcsin'(0) = 1$$

$$\arcsin''(0) = 0$$

$$\arcsin'''(0) = 1$$

$$\arcsin(x) = 0 + x + 0 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

$$L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

$$= 2R \left(\frac{d}{2R} + \frac{1}{6} \frac{d^3}{8R^3} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right) \right)$$

$$= d + \frac{1}{24} \frac{d^3}{R^2} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)$$

$$\Rightarrow L(d) - d = \frac{1}{24R^2} \cdot d^3 + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)$$

Es ergeben sich auf 5 signifikante Stellen die selben Werte wie oben.

Insbesondere sieht man hier direkt, dass sich bei zehnfacher Länge die tausendfache Differenz ergibt (d^3), mit $\frac{1}{24R^2} \approx 17 \cdot 10^{-18}$ erhält man leicht im Kopf die oben in Klammern angegebenen Abschätzungen.