Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2009/2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Dr. Jan Hamaekers

universitätbonn

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Mittwoch, 28.10.2009 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Umrechnung Zahlendarstellungen)

a) Schreiben Sie die Binärzahl 101010 als Dezimalzahl.

b) Schreiben Sie die Hexadezimalzahl $1A8$ als Dezimalzahl.

c) Schreiben Sie die Dezimalzahl 2210 als Oktalzahl.

d) Seien z_1 und z_2 zwei natürliche Zahlen mit identischer Ziffernfolge $d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0$ bezüglich unterschiedlicher Basen b_1 und b_2, also

$$z_1 = (d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0)_{b_1} \quad \text{und} \quad z_2 = (d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0)_{b_2}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1) Falls $b_1 > b_2$, so ist $z_1 > z_2$.
2) Falls $z_1 > z_2$, so ist $b_1 > b_2$.

e) Welcher arithmetischen Operation entspricht im b-adischen Zahlensystem das Verschieben (bzgl. des Stellenwertsystems) der Ziffern einer Zahl nach links, also

$$(d_{n-1}d_{n-2}\dots d_1d_0)_b \to (d_{n-1}d_{n-2}\dots d_1d_0\,0)_b?$$

Welcher entspricht die Verschiebung nach rechts, also

$$(d_{n-1}d_{n-2}\dots d_1d_0)_b \to (0\,d_{n-1}\,d_{n-2}\dots d_2d_1)_b?$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (b-Komplementdarstellung)

a) Schreiben Sie die negative Dezimalzahl -42 in Zweierkomplementdarstellung mit $n = 8$ und $n = 16$ Ziffern.

b) Gegeben sei eine Zahl $(z_{n-1}z_{n-2}\dots z_1z_0)_{K_2}$ in Zweierkomplementdarstellung mit n Ziffern. Wie sieht dieselbe Zahl aus, wenn $(n+1)$ Ziffern für das Zweierkomplement zur Verfügung stehen? Unterscheiden Sie zwischen positiven und negativen Zahlen und beweisen Sie Ihre Antwort.

c) Sei z eine negative Zahl in Zweierkomplementdarstellung mit n Ziffern. Welche positive Zahl entsteht durch Invertieren aller Bits in der Zahldarstellung von z?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Festkommazahlen)

Ein – zugegeben etwas primitiver – Rechner stellt reelle Zahlen im Festkommaformat mit einem Byte dar. Dabei werden ein Vorzeichen–Bit, vier Bits vor dem Komma und drei Bits hinter dem Komma verwendet. Somit haben Zahlen im Rechner die Form

$$z = (-1)^s \sum_{i=1}^{7} d_i \cdot 2^{i-4}$$

a) Welche Darstellung haben die Zahlen 7.25 und -5.625?

b) Wie viele verschiedene Zahlen können in obigem Format dargestellt werden?

c) Geben Sie die maximal und minimal darstellbaren Zahlen z_{max} und z_{min} sowie die betragsmäßig kleinste Zahl an.

d) Nicht darstellbare Zahlen x im Bereich $[z_{\text{min}}, z_{\text{max}}]$ werden auf die nächste darstellbare Zahl z gerundet. Dabei tritt ein (absoluter) Rundungsfehler $e_{\text{abs}} := |x-z|$ auf. Relativ zu $|x|$ (d.h. prozentual) ist dieser Fehler definiert als $e_{\text{rel}} := \frac{|x-z|}{|x|}$. Geben Sie den absoluten und den relativen Rundungsfehler bei der Darstellung der Zahl $x = \frac{1}{3}$ an.

e) Bestimmen Sie den maximalen absoluten und relativen Rundungsfehler für reelle Zahlen im Bereich $[z_{\text{min}}, z_{\text{max}}]$.

   Beachten Sie, dass eine Rundung von $|x| > 0$ auf $z = 0$ als Underflow gewertet wird und daher nicht in die Rundungsfehleranalyse eingeht.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Gleitkommazahlen)

a) Wir betrachten nun einen Rechner mit Gleitkommaarithmetik, der einen deutlich geringeren maximalen Rundungsfehler aufweisen soll. Dazu setzen wir für die Basis $b = 2$, verwenden $t = 3$ Ziffern für die Matissenlänge und $p = 1$ für die Exponentenlänge. Damit ist unsere *nomalisierte Gleitkommadarstellung* im Rechner gegeben durch:

$$\pm 1.d_1 d_2 \cdot 2^e \text{ wobei } d_1, d_2 \in \{0, 1\} \text{ und } e \in \{-1, 0, 1\}.$$

   Die Null wird gesondert dargestellt mit $d_1 = d_2 = 0$, $e = -1$, also:

$$\pm 0 := \pm 1.00 \cdot 2^{-1}$$

   Geben Sie alle darstellbaren, nichtnegativen normalisierten Gleitkommazahlen an (das Vorzeichen vernachlässigen wir) und markieren Sie diese auf einem Zahlenstrahl. Zur Darstellung einer beliebigen reellen Zahl x verwenden wir wieder die nächstgelegene Gleitkommazahl. Geben Sie den absoluten und den relativen Rundungsfehler bei der Darstellung der Zahlen $x = \frac{16}{5}$ und $x = \frac{3}{8}$ an.

b) Zeigen Sie durch Induktion, dass $x = \frac{1}{4}$ zur Basis $b = 5$ die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} 1 \cdot 5^{-i}$$

   besitzt, indem man die Konstruktion aus Beweis zu Satz 1.18 der Vorlesung nachvollzieht.

(10 Punkte)