Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2009/2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Dr. Jan Hamaekers

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Mittwoch, 27.1.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Bipartite Graphen I)

Zeigen Sie, dass jeder ungerichtete Graph $G = (V, E)$ einen bipartiten Subgraphen $H = (V, E')$, $E' \subset E$, mit $|E'| \geq |E|/2$ enthält.

Hinweis: Wie würde ein Algorithmus eine Knotenpartition finden, bzw. eine gegebene verändern?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Bipartite Graphen II)

a) Zeigen Sie, dass ein ungerichter Graph genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

b) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph, dessen Knoten alle genau $k \geq 1$ Nachfolger haben, d.h. $|\mathrm{suc}(v)| = k$ für alle $v \in V$. Sei weiterhin $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ eine Bipartition von G. Zeigen Sie, daß $|X| = |Y|$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Matrixnormen)

Zeigen Sie:

a) Die Spaltensummennorm ist der Vektornorm $\|\cdot\|_1$ zugeordnet,
d.h. $\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$.

b) Die Zeilensummennorm ist der Vektornorm $\|\cdot\|_\infty$ zugeordnet,
d.h. $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Hermitsche Matrizen und Eigenwerte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitsche Matrix, d.h. $A^H = A$.

a) Zeigen Sie: Alle Eigenwerte von A sind *reell*, d.h. $\lambda = \overline{\lambda}$ für jeden Eigenwert λ von A.

b) Zeigen Sie: Sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *verschiedene* Eigenwerte von A mit den jeweiligen Eigenvektoren v_1 und v_2, so gilt: v_1 und v_2 stehen senkrecht aufeinander, d.h. $v_1^H v_2 = 0$.

c) Hermitsche Matrizen vom Rang 1 lassen sich allgemein durch $A = bb^H$ mit einem Vektor $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ beschreiben. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = bb^H$.

(10 Punkte)