Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2009/2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Dr. Jan Hamaekers

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Besprechung in der Übungsgruppe ab 1.2.2010

Hinweis: Dieses Übungsblatt zählt nicht mehr zur Klausurzulassung.

Aufgabe 1. (Kondition eines Eigenwertproblems)

Ein gut konditioniertes Problem ist die Bestimmung der Eigenwerte der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie, dass die Berechnung der Koeffizienten $q(a,b,c) = -(a^2 + b^2 + c^2)$ und $r(a,b,c) = -2abc$ des charakteristischen Polynoms $P(x) = x^3 + qx + r$ ein gut konditioniertes Problem (bezüglich der relativen Konditionszahlen) ist.

b) Zeigen Sie, dass hingegen die Berechnung der Nullstellen $\lambda_1(q,r)$, $\lambda_2(q,r)$und $\lambda_3(q,r)$ von $P(x)$ extrem schlecht konditioniert sein kann. Betrachten Sie hierzu die (implizite) Ableitung von $P(\lambda_i(q,r)) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$.

Aufgabe 2. (Rückwärtsanalyse eines Gleichungssystems)

Unter der Voraussetzung $ad \neq bc$, kann die Lösung des lineare Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}$$

wie folgt berechnet werden: $x = \frac{d}{ad-bc}$ und $y = \frac{-c}{ad-bc}$. Seinen nun a, b, c, d Maschinenzahlen. Gleitpunktrechnung mit Maschinengenauigkeit $\varepsilon_{\mathbb{F}}$ ergebe $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ die exakte Lösung eines modifizierten Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{a}\tilde{x} & + & \tilde{b}\tilde{y} & = & 1 \\ \tilde{c}\tilde{x} & + & \tilde{d}\tilde{y} & = & 0 \end{array}$$

ist, wobei (in 1. Ordnung von $\varepsilon_{\mathbb{F}}$) gilt:

$$\begin{array}{lcl} |\tilde{a} - a| \leq 3|a|\varepsilon_{\mathbb{F}} & , & |\tilde{b} - b| \leq 3|b|\varepsilon_{\mathbb{F}} \\ |\tilde{c} - c| \leq \ |c|\varepsilon_{\mathbb{F}} & , & |\tilde{d} - d| \leq \ |d|\varepsilon_{\mathbb{F}}. \end{array}$$

Aufgabe 3. (LR-Zerlegung)

Zeigen Sie:

a) Sind $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rechte obere Dreiecksmatrizen, so ist auch das Produkt R_1R_2 eine rechte obere Dreiecksmatrix. Sind $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linke untere Dreiecksmatrizen mit normierter[1] Diagonale, so ist auch das Produkt L_1L_2 eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale.

[1] Normierte Diagonale heißt $l_{ii} = 1$.

b) Ist $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix vollen Ranges, so ist auch R^{-1} eine rechte obere Dreiecksmatrix. Ist $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale, so hat auch L vollen Rang und L^{-1} ist eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale.

Aufgabe 4. (LR–Zerlegung II)

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung von

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie $\det(\mathbf{A})$ mit Hilfe der LR–Zerlegung aus a).

c) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$ durch Lösen der Gleichungssysteme

$$\mathbf{L}\mathbf{y}_k = \mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{R}\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Dabei sind $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5. (LR–Zerlegung III)

Lösen Sie mit dem *Gaußchen Algorithmus mit Spaltenpivotisierung* das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & -3 & -6 \\ 12 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Geben Sie $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ und die ggf. benötigte Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ an.

Aufgabe 6. (Diagonaldominanz)

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *strikt diagonaldominant*, falls gilt

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}} |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie: Ist A eine strikt diagonaldominante Matrix, so ist die Gaußelimination ohne Pivotsuche durchführbar, und die bei jedem Teilschritt entstehende Matrix $A^{(i)}$ ist wieder strikt diagonaldominant.

Aufgabe 7. (Bandmatrizen)

a) Eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *Bandmatrix* mit der Bandbreite $2m + 1$, falls gilt:

$$|i - j| > m \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Zeigen Sie, dass die LR–Zerlegung die Bandstruktur erhält, d.h. falls A eine Bandmatrix mit Bandbreite $2m + 1$ ist, so sind auch L und R Bandmatrizen dieser Bandbreite.

b) In Anwendungen treten oft Matrizen auf, bei denen bis auf die Hauptdiagonale und wenige Nebendiagonalen alle Einträge verschwinden, also Matrizen mit

$$|i - j| \notin I \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Dabei indiziert $I \subset \mathbb{N}$ die (Neben–)Diagonalen mit nichtverschwindenden Einträgen. Man nehme $I \neq \{0, 1, \dots, m\}$ an, so dass sich solche Matrizen von den oben beschriebenen Bandmatrizen unterscheiden. Bleibt diese Struktur bei der LR–Zerlegung erhalten? Führen Sie einen Beweis oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.