



Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2009/2010
Prof. Dr. Mario Bebindorf
Dr. Jan Hamaekers



Übungsblatt 2. Abgabe am Mittwoch, 4.11.2009 (vor der Vorlesung).

Aufgabe 1. (Fehlerfortpflanzung)

Wir wollen nun die Fortpflanzung von Fehlern bei der Durchführung der vier arithmetischen Grundoperationen (+, -, ·, /) betrachten. Es seien \tilde{x} , \tilde{y} die mit relativen Fehlern ε_x , ε_y behafteten Werten für x bzw. y . Zeigen Sie, daß selbst bei exakter Rechnung (also ohne weitere Rundungsfehler) für die relativen Fehler der Ergebnisse die folgenden Aussagen gelten (vgl. Lemma 2.3 aus der Vorlesung):

$$\text{a) } \frac{(x+y) - (\tilde{x} + \tilde{y})}{x+y} = \varepsilon_x \frac{x}{x+y} + \varepsilon_y \frac{y}{x+y}$$

$$\text{b) } \frac{(x-y) - (\tilde{x} - \tilde{y})}{x-y} = \varepsilon_x \frac{x}{x-y} - \varepsilon_y \frac{y}{x-y}$$

$$\text{c) } \frac{x \cdot y - \tilde{x} \cdot \tilde{y}}{x \cdot y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_x \varepsilon_y$$

$$\text{d) } \frac{x/y - \tilde{x}/\tilde{y}}{x/y} = \varepsilon_x - \varepsilon_y + \frac{\varepsilon_y}{1 - \varepsilon_y} (\varepsilon_x - \varepsilon_y)$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Rundung)

a) Zeigen Sie, daß die folgenden Ausdrücke mathematisch äquivalent sind:

- $((a+b)(a-b))^2$
- $(a^2 + b^2)^2 - 4(ab)^2$
- $(a^2 - b^2)^2$

b) Seien nun $a = 10^6 + 1$ und $b = 10^6 - 2$. Multiplizieren Sie damit obige Ausdrücke aus. Jedes Zwischenergebnis, das nicht mit 10 Dezimalstellen dargestellt werden kann, soll auf 10 Stellen gerundet werden.

c) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Resultate (2 gültige Ziffern genügen). Was ist der Grund für dieses Verhalten?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Rekursion)

Gegeben sei die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $y_i = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x x^i dx$.

a) Zeigen Sie die Abschätzungen

$$\frac{1}{e(i+1)} < y_i < \frac{1}{i+1} \quad \text{und} \quad y_{i+1} < y_i.$$

b) Zeigen Sie die Rekursionsformel

$$y_{i+1} = 1 - (i + 1) y_i.$$

Damit lassen sich also die Integrale y_0, y_1, \dots, y_k auf zweierlei Weise berechnen:

$$\begin{array}{ll} y_{i+1} := 1 - (i + 1) y_i & \text{Vorwärts mit } i = 0, 1, 2, 3, \dots, k - 1 \\ y_{i-1} := \frac{1 - y_i}{i} & \text{Rückwärts mit } i = k, k - 1, k - 2, \dots, 1 \end{array}$$

falls Startwerte y_0 bzw. y_k bekannt sind.

c) Anstelle der exakten Startwerte y_0 bzw. y_k seien genäherte Startwerte \tilde{y}_0 bzw. \tilde{y}_k gegeben. Entsprechend resultieren obige Rekursionen in genäherten Werten \tilde{y}_i . Wie lauten die absoluten Fehler $\Delta y_i = y_i - \tilde{y}_i$ bei Vorwärts- und Rückwärtsrekursion in Abhängigkeit von Δy_0 bzw. Δy_k ?

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Rekursion)

Schreiben Sie ein C oder C++ Programm, das die Werte y_0, y_1, \dots, y_k aus Aufgabe 3 für $k = 30$ mittels der dort diskutierten Rekursionen berechnet. Verwenden Sie als Startwert für die Vorwärtsrekursion den exakten Wert

$$y_0 = \frac{e - 1}{e}$$

und als Startwert für die Rückwärtsiteration die Werte

$$y_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e(k+1)} + \frac{1}{k+1} \right) \quad \text{und} \quad y_k = 10^6,$$

also das arithmetische Mittel der Abschätzungen oben und einen vollkommen schlechten Wert. Stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch dar und beurteilen Sie diese im Hinblick auf Aufgabe 3(c).

(10 Punkte)

Hinweise:

- `#include <math.h>`
`double exp(double x);`
erlaubt die Auswertung von `e=exp(1)`.
- Ein Beispielprogramm in der Sprache C ist auf der Vorlesungshomepage http://wissrech.ins.uni-bonn.de/teaching/algmath/ws09_i einzusehen.

Achtung: Die Punkte für die Programmieraufgabe werden gesondert gezählt! Die Programmieraufgaben werden im CIP-Pool (Wegelerstraße 6, Raum E02) abgegeben. Um im CIP-Pool einen Account zu erhalten, müssen Sie sich zunächst dort anmelden (frühzeitig). Bezüglich der Abgabe der Programmieraufgabe hängen in der Woche vom 9.11.-13.11.2009 im CIP-Pool Listen aus. In diese Listen müssen Sie sich (bzw. Ihre Dreiergruppe) zu dem gewünschten Abgabetermin eintragen. Siehe dazu auch die Vorlesungshomepage http://wissrech.ins.uni-bonn.de/teaching/algmath/ws09_i und die CIP-Pool Homepage <http://cip.iam.uni-bonn.de/index.html>.

Abgabe innerhalb der Woche 16.11.-22.11.2009 im CIP-Pool