Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2009/2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Dr. Jan Hamaekers

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Mittwoch, 11.11.2009 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Vermeidung von Auslöschung)

Wir haben gelernt, dass mit „Auslöschung“ eine inakzeptable Vergrößerung des relativen Eingabefehlers bezeichnet wird. Ferner haben wir gelernt, dass die Hauptquelle für Auslöschung die Subtraktion von betragsmäßig nahezu gleich großen Zahlen ist.

Schreiben Sie folgende Ausdrücke so um, dass für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird.

a) $\sqrt[3]{1+x} - 1$ für $x \approx 0$

b) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$

c) $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ für $x \gg 1$ (Erinnerung: d.h. x wesentlich größer als 1)

d) $x^3\left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x}\right)$ für $x \gg 1$

Hinweis: Durch Erweiterung mit geeignet gewählten Termen $\frac{a}{a}$ mit $a \neq 0$ können Differenzen wegfallen. Beachten Sie die Identität $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Kondition)

Sei $y = f(x)$ die Lösung eines Problems mit reeller Eingabe und Ausgabe. Bestimmen Sie die Konditionszahlen $\kappa(f, x)$ für

a) $f(x) = x$,

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0$,

c) $f(x) = 1/x$,

d) $f(x) = e^x$,

e) Geben Sie für a) bis d) jeweils an, für welche x die Funktionsauswertungen qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert sind.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Gesetze der Rückwärtsanalyse)

Bei der Rückwärtsanalyse wird das Resultat einer Rechnung als exaktes Ergebnis für gestörte Operanden interpretiert, also $a \circledcirc b = (a \circ b)(1+\epsilon)$ für $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$. Welche der folgenden Gesetze gelten, wenn man ε für alle Operanden als konstant annimmt?

a)	Kommutativgesetze:	$a + b = b + a$	bzw. $a \cdot b = b \cdot a$
b)	Assoziativgesetze:	$(a+b)+c = a+(b+c)$	bzw. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
c)	Distributivgesetze:	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	bzw. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Sautter–Trick)

Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien alle $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon < 1$ für $1 \leq i \leq n$ und sei $\varepsilon < \frac{1}{n}$. Weiterhin sei δ definiert durch

$$1 + \delta = \prod_{i=1}^{n} (1 + \varepsilon_i)^{\pm 1}$$

Dann gilt:

$$|\delta| \leq \frac{n \cdot \varepsilon}{1 - n \cdot \varepsilon}$$

Die „± 1" in dem Produkt bedeutet, daß der Exponent bei $(1+\varepsilon_i)$ für $1 \leq i \leq n$ entweder $+1$ oder -1 lautet, aber nicht für alle $1 \leq i \leq n$ identisch zu sein braucht!

(5 Punkte)

Aufgabe 5. (Stabilitätsanalyse)

Seien Maschinenzahlen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben und sei $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ zu berechnen. Der Rechner habe die Maschinengenauigkeit $\varepsilon_{\mathbb{F}}$. Nach jedem Zwischenergebnis muss gerundet werden, so dass die tatsächliche Implementierung mit

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (\cdots((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \oplus \cdots) \oplus x_n$$

gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass f rückwärts stabil ist, d.h. betrachten Sie

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$$

und zeigen Sie, dass diese relativen Eingabefehler $\frac{\Delta x_i}{x_i}$ sich wie $|\frac{\Delta x_i}{x_i}| \leq c_R \cdot \varepsilon_{\mathbb{F}}$ mit einer von x_i unabhängigen Konstanten $c_R > 0$ abschätzen lassen.

b) Zeigen Sie, dass für den absoluten Fehler zwischen $\tilde{f}$ und f gilt:

$$|\tilde{f}(x_1, \ldots, a_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \leq \varepsilon_{\mathbb{F}} \sum_{i=1}^{n} |n - i + 1| \, |x_i|$$

c) In welcher Reihenfolge sollte summiert werden, um den absoluten Fehler zu minimieren? In welcher Reihenfolge sollte summiert werden, um den relativen Fehler zu minimieren?

Bemerkung: Kleine Terme der Größenordnungen $(\varepsilon_{\mathbb{F}})^2, (\varepsilon_{\mathbb{F}})^3, \ldots$ sollen vernachlässigt werden.

(10 Punkte)