



# Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2009/2010  
Prof. Dr. Mario Bebindorf  
Dr. Jan Hamaekers



## Übungsblatt 7. Abgabe am Mittwoch, 9.12.2009 (vor der Vorlesung).

### Aufgabe 1. (Binärbäume)

Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt *out-tree*, wenn die ungerichtete Version von  $G$  ein Baum ist und es in  $G$  genau einen Knoten  $w$  gibt, der nicht Endpunkt einer Kante von  $G$  ist. Dieser Knoten  $w$  heißt Wurzel. Ein Knoten ohne ausgehende Kante heißt Blatt, die übrigen Knoten werden als innere Knoten bezeichnet. Gibt es eine Kante von einem Knoten  $x$  zu einem Knoten  $y$ , dann heißt  $x$  Vater von  $y$  und  $y$  Sohn von  $x$ . Hat jeder innere Knoten höchstens zwei Söhne, so spricht man von einem Binärbaum. Hat jeder innere Knoten genau zwei Söhne, so spricht man von einem regulären Binärbaum. Die mittlere Pfadlänge eines *out-tree*  $G = (V, E)$  mit Wurzel  $w$  und Blättern  $L$  ist gegeben durch:

$$\bar{H}(G) = \frac{1}{|L|} \sum_{v \in L} \text{dist}_G(w, v).$$

Zeigen Sie:

*In jedem regulärem Binärbaum mit  $|L|$  Blättern ist die mittlere Pfadlänge nicht kleiner als  $\log_2 |L|$ .*

(10 Punkte)

### Aufgabe 2. (Zusammenhang)

Sei  $\kappa(G)$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  und  $e \in E$ . Sei ferner  $G' = (V, E')$  mit  $E' = E \setminus \{e\}$  derselbe Graph ohne Kante  $e$ . Zeigen Sie:

a)  $\kappa(G) \leq \kappa(G') \leq \kappa(G) + 1$

b)  $\kappa(G) = \kappa(G') \Leftrightarrow e$  liegt auf einem Zyklus.

(10 Punkte)

### Aufgabe 3. (Topologische Ordnung)

Eine topologische Ordnung eines gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Ordnung der Knoten  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , so daß für jede Kante  $e = (v_i, v_j) \in E$  die Relation  $i < j$  gilt.

Zeigen Sie, daß ein gerichteter Graph eine topologische Ordnung genau dann hat, wenn er azyklisch ist.

(10 Punkte)

### Aufgabe 4. (Knotengrad)

Zeigen Sie, daß für jeden ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  die Anzahl

$$|\{v \in V \mid |\text{suc}(v)| \text{ ist ungerade}\}|$$

gerade ist.

(10 Punkte)

**Hinweis: Am Mittwoch den 2.12.2009 ist *Dies Academicus*.**

- Daher erfolgt die Abgabe des sechsten Übungsblattes außerplanmäßig am Montag den 7.12.2009 zwischen 10:00-10:15 (scharf) vor der Vorlesung.
- Die Abgabe des siebten Übungsblattes erfolgt dann wieder planmäßig am Mittwoch den 9.12.2009 zwischen 10:00-10:15 (scharf) vor der Vorlesung.
- Die Abgabe der Programmieraufgaben ist davon nicht betroffen und erfolgt planmäßig.