Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Mittwoch, 28.04.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Verteilung von Zufallsvariablen)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, S eine abzählbare Menge und $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable. Weise nach, dass durch

$$\mu_X(E) := \sum_{a \in E} P(X = a), \quad E \subset S,$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{P}(S)$ gegeben ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 2. (σ-Algebren)

Es sei $\Omega := \{a, b, c, d\}$.

a) Gib die kleinstmögliche σ-Algebra über Ω an.

b) Ist die Menge $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \Omega\}$ eine σ-Algebra über Ω? Wenn nicht, dann ergänze sie zu einer solchen. (Nicht zur Potenzmenge.)

c) Konstruiere eine σ-Algebra über Ω, die nicht $\mathcal{P}(\Omega)$ und nicht den in a) und b) konstruierten σ-Algebren entspricht.

(9 Punkte)

Aufgabe 3. (Ereignisse als Mengen)

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und seien $A, B, C \in \mathcal{A}$ drei Ereignisse. Drücke folgende Ereignisse mit Hilfe von Mengenoperationen aus:

- E_1: Keines der Ereignisse A, B und C tritt ein.
- E_2: Mindestens eines der Ereignisse tritt ein.
- E_3: Genau eines der Ereignisse tritt ein.
- E_4: Mindestens zwei der Ereignisse treten ein.
- E_5: Mindestens eines der Ereignisse tritt nicht ein.
- E_6: Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. (Spiele)

Gib jeweils die verwendeten Wahrscheinlichkeitsräume an.

a) Beim Würfeln mit drei Würfeln treten die Augensummen 9 und 10 jeweils bei sechs Zahlenkombinationen auf. Sind sie deshalb auch gleichwahrscheinlich?

b) Bei einem Würfel werden die Ecken gleichmäßig abgeschliffen, so dass er auch auf diesen liegen bleiben kann. Die Wahrscheinlichkeit jeder Ecke ist aber nur 1/4 so groß wie die einer Seite. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln?

c) Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, darunter vier Asse. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gut gemischten Spiel alle Asse aufeinander liegen?

(9 Punkte)

Aufgabe 5. (Jackenproblem)

n Jecken stehen nach einer Karnevalssitzung an der Garderobe an, um ihre Jacken abzuholen. Der Garderobier hat selbst ausgiebig mitgefeiert und dabei zu tief ins Glas geschaut. Deshalb achtet er nicht mehr darauf, wem welches Kleidungsstück gehört und gibt einfach jedem der Wartenden rein zufällig eine Jacke.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner der Jecken die richtige Jacke erhält?

Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Hinweis: Ein Korollar aus der Vorlesung ist sehr hilfreich.

(8 Punkte)