Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 10. Abgabe am **Mittwoch, 07.07.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Bernsteinpolynome I)

Mit Hilfe der Bernsteinpolynome

$$B_i^n(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad n \in \mathbb{N},\ i = 0, \dots, n,$$

sei für $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ der Operator B_n definiert durch

$$(B_n f)(x) := \sum_{i=0}^{n} f\big(\frac{i}{n}\big) B_i^n(x), \quad x \in [0,1].$$

Zeige: Für $f_j(x) := x^j$ gilt

$$(B_n f_0)(x) = 1, \quad (B_n f_1)(x) = x, \quad (B_n f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x^2.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Bernsteinpolynome II)

Zeige:

a) Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (i - nx)^2 B_i^n(x) = nx(1-x), \quad x \in [0,1].$$

b) Es gilt für jedes $\delta > 0$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ |i/n - x| \geq \delta}}^{n} B_i^n(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}, \quad x \in [0,1].$$

c) Es sei f stetig auf $[0,1]$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - (B_n f)(x)| < \varepsilon.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Ableiten von B-Splines)

Es sei $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Knotenfolge mit $t_{i+1} > t_i$ für alle i. Zeige für $k \geq 2$:

$$B'_{i,k}(x) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(x) - \frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass

$$\frac{\omega_{i,k}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} = \frac{\omega_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} \quad \text{und} \quad \frac{1 - \omega_{i,k}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} = \frac{1 - \omega_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}$$

gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (De Boors Algorithmus)

Es sei $s(t) = \sum_{i=0}^{n+2} \alpha_i B_{i,k}(t)$ der interpolierende kubische Spline zu den Knoten t_i, $i = 0, \ldots, n+6$, mit den De-Boor-Punkten α_i, $i = 0, \ldots, n+2$. Der Funktionswert von $s(t)$ für $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$, $3 \leq \ell \leq n+2$, kann mit Hilfe des Algorithmus

$$\begin{aligned} s_{i,0} &:= \alpha_i, \quad i = \ell - 3, \ldots, \ell \\ s_{i,k} &:= s_{i,k-1}\omega_{i,k} + s_{i-1,k-1}(1 - \omega_{i,k}), \quad i = \ell - 3 + k, \ldots, \ell,\ k = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

effizient berechnet werden, wobei $\omega_{i,k}$ wie in Definition 10.37 definiert ist.
Zeige, dass $s(t) = s_{\ell,3}$ gilt.

(10 Punkte)