Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Mittwoch, 14.07.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Zusammengesetzte Simpsonregel)

a) Zeige, dass die Simpsonregel bei der Approximation von $\int_a^b x^4 \,\mathrm{d}x$ um $(b-a)^5/120$ vom exakten Wert abweicht.

b) Schätze ab, wie viele Funktionsauswertungen nötig sind, damit der Fehler bei der Approximation des Integrals aus a) durch die zusammengesetzte Simpsonregel kleiner als 10^{-8} wird.

c) Beweise allgemein, dass das Romberg-Verfahren für die Schrittweiten $h_0 = 1$ und $h_1 = 1/2$ gerade die Simpsonregel extrapoliert.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Zusammengesetzte Trapezregel)

Zeige, dass der Fehler bei der Approximation zusammengesetzten Trapezregel

$$T_h(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y_{j+1} - y_j}{2} (f(y_j) + f(y_{j+1}))$$

mit $y_j = a + hj$, $h = (b-a)/m$, $j = 0, \dots, m$, dargestellt werden kann durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_h(f) = -\int_a^b K(x) f''(x)\,\mathrm{d}x$$

mit dem sogenannten Peano-Kern

$$K(x) := \sum_{j=0}^{m-1} K_j(x),$$

wobei

$$K_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y_j)(y_{j+1} - x), & x \in [y_j, y_{j+1}] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Maximaler Exaktheitsgrad)

Zeige, dass es für $m \in \mathbb{N}$ keine numerische Quadraturformel

$$Q(f) := \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)$$

mit $w_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in [a, b]$, $a < b$, $i = 0, \dots m$, gibt, die auf Π_{2m+2} exakt ist.

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Romberg-Verfahren)

a) Implementiere die zusammengesetzte Trapezregel. Approximiere damit $\int_0^1 \sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x$ sowie $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ jeweils für $m = 1, 10, 20$.

b) Implementiere das Romberg-Verfahren. Approximiere damit $\int_0^1 \sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x$ sowie $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ jeweils für $n = 1, 10, 20$.

(10 Punkte)

Abgabe innerhalb der Woche 12.07. – 16.07.2010 im CIP-Pool