Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Mittwoch, 12.05.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Jackenproblem II)

Erinnere dich an das Jackenproblem vom ersten Übungsblatt. Wenn X_n die Anzahl der Jecken ist, die ihre eigene Jacke erhalten, wie ist X_n dann verteilt?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Eine Reihe von Ereignissen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \{0,1\}$, sei folgendermaßen rekursiv definiert (mit $n \in \mathbb{N}$): Tritt Ereignis A_n ein, so tritt Ereignis A_{n+1} mit der Wahrscheinlichkeit $1/2 < p_1 < 1$ ein. Tritt A_n nicht ein, so tritt A_{n+1} mit der Wahrscheinlichkeit $0 < p_2 < 1/2$ ein. Das Ereignis A_1 tritt ein.
Mit $q_n := P(A_n)$ sei die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_n bezeichnet.

a) Berechne q_{n+1} in Abhängigkeit von q_n.

b) Finde eine geschlossene Form für q_n, d.h. gib q_n nur in Abhängigkeit von q_1 an.

c) Berechne $\lim_{n\to\infty} q_n$. Wie ändert sich der Grenzwert, wenn das Ereignis A_1 nicht eintritt?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Unabhängigkeit von Ereignissen)

Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Dabei seien Ω durch $\Omega := \{0,1\}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und P durch die Elementarwahrscheinlichkeiten $q(\omega) := p^{|\omega|}(1-p)^{n-|\omega|}$ für ein $p \in [0,1]$ und mit $|\omega| := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gegeben.
Zeige, dass die Ereignisse $A_j = \{\omega \in \Omega | \omega_j = 1\}$, $j = 1, \ldots, n$, unabhängig sind.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Anonymisierte Umfrage)

Im Rahmen einer Studie werden Fußgänger befragt, ob sie gelegentlich rote Ampeln überqueren. Um Anonymität zu gewährleisten, benutzt man das folgende Verfahren: Jeder Befragte wirft ersteinmal im geheimen für sich einen fairen Würfel. Hat er eine Eins gewürfelt, so antwortet er immer mit Nein, im Falle einer Sechs immer mit Ja. In allen anderen Fällen sagt er die Wahrheit. Wir nehmen an, dass sich alle an diese Anweisung halten. In der Umfrage antworten schließlich 3/4 der Teilnehmer mit Ja.

a) Wie hoch ist der zu vermutende Anteil der Fußgänger, die gelegentlich rote Ampeln überqueren?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilnehmer, der in der Umfrage mit „Ja“ geantwortet hat, tatsächlich gelegentlich bei Rot die Straße überquert?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der mit „Nein“ geantwortet hat, wirklich immer auf Grün wartet?

(10 Punkte)