Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Donnerstag, 20.05.2010 (siehe unten)**.

Aufgabe 1. (Symmetrischer Random-Walk)

Mit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei der aus der Vorlesung bekannte Random-Walk auf $\mathbb{Z}$ beschrieben. Es seien dabei $p = 1/2$, $S_0 := a \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$. Dann ist durch

$$T_\lambda(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, S_n(\omega) = \lambda\}$$

die erste Trefferzeit von λ (bzw. für $\lambda = a$ die erste Rückkehrzeit nach a) gegeben. Ereignisse wie $\{T_\lambda \leq n\}$ hängen von mehreren Positionen des Random-Walk $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ ab, deshalb benötigt man für ihre Beschreibung die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $(S_j)_{j=1,\ldots,n}$. Durch

$$S^{(n)}(\omega) := (S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega)).$$

ist der Pfad bis zur Zeit n gegeben.

a) Gib den Zustandsraum der Zufallsgröße S^n (Pfadraum) an und weise nach, dass

$$\mu_a(\{(s_0, \ldots, s_n)\}) := P(S_0 = s_0, \ldots, S_n = s_n)$$

der Gleichverteilung auf diesem Raum entspricht.

b) Es gelte entweder $a < \lambda$ und $b \leq \lambda$ oder $a > \lambda$ und $b \geq \lambda$. Zeige, dass

$$P(T_\lambda \leq n, S_n = b) = P(S_n = 2\lambda - b)$$

gilt.

(10 Punkte)

Da die Vorlesung am 19.05. aufgrund des Dies Academicus ausfällt, sind die Lösungen dieses Übungsblattes am Donnerstag, 20.05.2010, nach der Analysis-II-Vorlesung auf dem Flur vor dem kleinen Hörsaal abzugeben. Die Mappen werden dort bis ca. 10:15 Uhr ausliegen.

Aufgabe 2. Viele Autoversicherungen arbeiten zur Ermittlung der jährlichen Prämie mit einem sogenannten *Bonus-Malus-System*. Dabei gibt es verschiedene Beitragsstufen. Höhere Stufen bedeuten höhere Beiträge. Unfallfreies Fahren wird durch eine niedrigere Stufe im folgenden Jahr belohnt und jeder durch die Versicherung beglichene Schaden durch einen höhere Stufe bestraft. Befindet sich ein Versicherter bereits auf der höchsten bzw. niedrigsten Stufe, so kann er sich nicht weiter verschlechtern bzw. verbessern.

Für ein sehr einfaches Modell gebe es bei einer Versicherung vier Beitragsstufen. Bleibt ein Autofahrer in einem Jahr unfallfrei, so wird er eine Stufe herabgestuft. Für jeden der Versicherung gemeldeten Schaden wird er hingegen eine Stufe höhergestuft.

Mit X sei die Anzahl der Schadensfälle eines Autofahrers in einem Jahr bezeichnet. Die Versicherung nimmt an, dass X Poisson-verteilt ist zum Parameter λ, d.h.

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Die Zufallsvariable Y_n beschreibe die Stufe eines Versicherten nach n Jahren, Y_0 sei die Startstufe. Gib die Übergangsmatrix für die Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an und berechne $P(Y_3 = 2 \,|\, Y_0 = 3)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Ein stark vereinfachtes Wettermodell beruht auf der Annahme, dass das Wetter an zwei aufeinanderfolgenden Tagen ähnlich ist. Wir modellieren das Wetter (an einem Tag) als Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{$„sonnig“„bewölkt“, „regnerisch“$\}$. Hierzu nehmen wir die folgende Übergangsmatrix an:

$$P = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Am Dienstag, 11. Mai 2010, war es bewölkt.

a) Berechne, ausgehend vom obigen Modell, die Verteilung des Wetters am Donnerstag, 13. Mai 2010 (Christi Himmelfahrt), also die Wahrscheinlichkeiten, dass das Wetter an diesem Tag sonnig, bewölkt oder regnerisch sein wird! Wie lautete die Verteilung, wenn es am 11. Mai 2010 regnerisch gewesen wäre?

b) Berechne die Verteilung des Wetters am Sonntag, 11. Juli 2010 (Finale der Fußballweltmeisterschaft). Wie lautete die Verteilung, wenn es am 11. Mai 2010 regnerisch gewesen wäre?

Hinweis: Potenzen von Diagonalmatrizen lassen sich sehr leicht berechnen!

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Ein einfaches Modell für die Diffusion zweier inkompressibler Gase zwischen zwei Behältern lässt sich folgendermaßen als Urnenmodell beschreiben.

Zwei Urnen enthalten j bzw. k Kugeln. Von diesen Kugeln sind insgesamt r rot, der Rest grün. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird aus beiden Urnen zufällig und unabhängig voneinander je eine Kugel gezogen und in die jeweils andere Urne gelegt.

Es sei nun X_n die Anzahl roter Kugeln in der ersten Urne nach dem Zeitpunkt n. Begründe, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette ist. Gib den Zustandsraum und die Übergangswahrscheinlichkeiten an.

(10 Punkte)