Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Mittwoch, 02.06.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Abschätzungen)

a) Zeige, dass für eine diskrete, reellwertige Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $a > 0$

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

gilt.

b) Zeige weiter, dass für $a, t > 0$

$$P(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-at} E(\mathrm{e}^{tX})$$

gilt.

c) Es seien $X_i \colon \Omega \to \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängige Zufallsvariablen mit

$$P(X_i = 1) = p > 0, \quad P(X_i = 0) = 1 - p.$$

Zeige, dass für $a, t > 0$

$$P\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\Big) \leq \mathrm{e}^{-ant} E\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)^n$$

gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Jackenproblem III)

Betrachte die von den Übungsblättern 1 und 3 bekannten Jecken, die auf ihre Jacken warten. Berechne den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der Jecken, die ihr eigenes Kleidungsstück erhalten.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Tschebyscheff-Ungleichung)

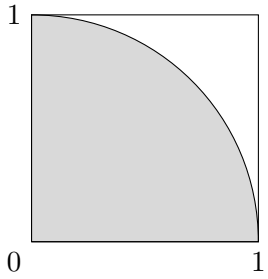
An einem Badesee sind an einem heißen Sommertag 2000 Badegäste, die gerne Eis essen. Ein Eiswagen bietet zwei Sorten Eis an, die beide gleich beliebt sind. Berechne, wie viele Portionen von jeder Eissorte der Wagen vorrätig haben muss, damit mit einer Sicherheit von 99 Prozent jeder Badegast das Eis seiner Wahl erhält.

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Monte-Carlo-Verfahren)

In der C-Standardbibliothek (`stdlib.h` bzw. `cstdlib`) enthalten ist die Routine `rand()`, die zufällig eine Zahl vom Typ Integer aus der Menge $\{0, 1, \ldots, \texttt{RAND_MAX}\}$ zurückliefert. Um bei jedem Programmaufruf unterschiedliche Zufallszahlen zu erhalten, empfiehlt es sich, `srand(time(NULL))` zu nutzen.

a) Ein Viertel-Einheitskreis liege auf folgende Art in einem Quadrat der Seitenlänge 1:



Das Ziel ist ein Monte-Carlo-Verfahren, dass π approximiert. Erzeuge dazu n Zufallszahlen aus $[0,1] \times [0,1]$ und überprüfe, wie viele von ihnen im Viertelkreis liegen. Der Quotient aus der Anzahl der Zufallszahlen, die im Viertelkreis liegen und der Gesamtzahl der Zahlen ist eine Näherung für den Flächeninhalt des Viertelkreises.

Wähle n so, dass die errechnete Approximation an π mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,95$ einen Fehler von $0,04$ nicht überschreitet.

b) Wie man beispielsweise durch Herleiten des Riemann-Integrals verifizieren kann, gilt für geeignete $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in [a,b]$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{1}$$

Hieraus lässt sich ein Monte-Carlo-Verfahren für die Integration konstruieren. Verwendet man als x_i, $i = 1, \ldots, n$, in dem Intervall $[a,b]$ gleichverteilte Zufallszahlen, so dient die rechte Seite von (1) als Schätzwert für das Integral.

Es sei

$$f(x) := \begin{cases} 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-2500x^2}}, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{50}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne eine Approximation an

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

mit dem oben beschriebenen Verfahren. Das Integral hat approximativ den Wert $0,4439938162$. Wie groß musst du das n wählen, damit der Fehler in 95 % der Fälle $0,01$ nicht überschreitet?

c) Die Konvergenzrate in b) kann durch Importance Sampling verbessert werden. Da f nur auf dem Intervall $(-\frac{1}{50}, \frac{1}{50})$ ungleich null ist, wählen wir als Wahrscheinlichkeitsverteilung, statt der bisher verwendeten Gleichverteilung ($\mu(x) = 1/2$ auf dem Intervall $[-1,1]$), nun

$$\nu \colon [-1,1] \to \mathbb{R}^+$$
$$\nu(x) = \begin{cases} 24, & \text{für } |x| < \frac{1}{50} \\ \frac{1}{49}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um $n \in \mathbb{N}$ gemäß ν verteilte Zufallszahlen zu erhalten, erzeugt man zunächst n gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[0,1]$ und transformiert diese dann mit der Funktion

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 49\xi - 1, & \text{für } \xi < \frac{1}{50}, \\ \frac{\xi}{24} - \frac{1}{48}, & \text{für } \frac{1}{50} \leq \xi \leq \frac{49}{50}, \\ 49\xi - 48, & \text{für } \xi > \frac{49}{50}. \end{cases}$$

Implementiere die Integration der Funktion f aus b) mit Importance Sampling durch ν. Wie groß musst du das n jetzt wählen, damit der Fehler in 95 % der Fälle $0,01$ nicht überschreitet?

(15 Punkte)

Abgabe innerhalb der Woche 31.05.–04.06.2010 im CIP-Pool