Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Mittwoch, 09.06.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Mehrere stationäre Verteilungen)

Betrachte die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Markovkette mehr als eine stationäre Verteilung besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Resultaten der Vorlesung? Ermittle den Limes von P^n für $n \to \infty$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Ehrenfest-Modell I)

Im Ehrenfest-Modell betrachtet man N Kugeln, welche auf zwei Urnen aufgeteilt sind. Zu jedem Zeitpunkt wird eine Kugel zufällig gewählt. Sie wird der Urne, in der sie sich gerade befindet, entnommen und in die andere Urne gelegt. Es sei X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n.

a) Stelle die Übergangsmatrix P der Markov-Kette X_n auf.

b) Klassifiziere die Markov-Kette nach Reduzibilität und Periodizität.

c) Zeige, dass die Binomialverteilung mit Parametern $p = 1/2$ und N die stationäre Verteilung dieser Markov-Kette bildet.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Ehrenfest-Modell II)

Betrachte erneut das Ehrenfestmodell aus der letzten Aufgabe.

a) Zeige, dass die stationäre Verteilung der Ehrenfestkette, also die Binomialverteilung mit Parametern $p = 1/2$ und N, nicht die Grenzverteilung der Markovkette ist, d.h., zeige, dass es Anfangsverteilungen $\mu^{(0)}$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\lim_{n\to\infty} \mu^{(0)} P^n \neq \pi$.

   Warum steht diese Aussage nicht im Widerspruch zu den Resultaten der Vorlesung?

b) Wir modifizieren die Ehrenfestkette folgendermaßen: zu jedem Zeitpunkt n wird eine Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ „Kopf“ und sonst „Zahl“ liefert. Im Falle von „Zahl“ wird, wie beim ursprünglichen Ehrenfestmodell, eine Kugel zufällig gewählt und von der Urne, in der sich die gezogene Kugel gerade befindet, in die andere Urne gelegt. Im anderen Fall wird die Konfiguration nicht verändert. Sei erneut X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n. Konstruiere die Übergangsmatrix dieser Markovkette!

c) Finde die stationäre Verteilung π der in b) konstruierten Markovkette. Gilt jetzt $\lim_{n\to\infty} \mu^{(0)} P^n = \pi$ für alle Anfangsverteilungen $\mu^{(0)}$?

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Lagrange-Interpolation)

Es sei $\Phi = \Pi_n$ der Funktionenraum der Polynome vom Grad höchstens n mit Monombasis $\phi_j(x) = x^j$, $j = 0, \ldots, n$. Darüber hinaus seien $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, \ldots, n$. Seien weiterhin $M \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$ die Vandermonde-Matrix mit Einträgen $M_{i,j} = \phi_j(x_i)$ und $M(i,x) \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$ die Matrix, die durch Ersetzen der i-ten Zeile von M durch $(\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ entsteht.
Zeige, dass

$$L_i^{\Phi}(x) = \frac{\det M(i,x)}{\det M} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = L_i(x), \quad i = 0, \ldots, n,$$

gilt und dass M genau dann regulär ist, wenn die Stützstellen x_i, $i = 0, \ldots, n$, paarweise verschieden sind.

(10 Punkte)