Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Mittwoch, 16.06.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. (Dividierte Differenzen)

Es seien $x := (a_0, \dots, a_n)^T$, $b := (y_0, \dots, y_n)^T$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & x_1 - x_0 & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_1)(x_2 - x_0) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_1)(x_n - x_0) & \dots & \prod_{\ell=0}^{n-1}(x_n - x_\ell) \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ soll nun mit dem Algorithmus 6.30 gelöst werden. Sei dabei $b^{(k)} = (b_k^{(k)}, \dots, b_n^{(k)})^T$ die rechte Seite nach dem k-ten Schritt. Zeige, dass

$$\begin{aligned} b_i^{(0)} &= \delta[x_i], \quad i = 0, \dots, n \\ b_i^{(k)} &= \delta[x_0, \dots, x_{k-1}, x_i] \prod_{\ell=0}^{k-1}(x_i - x_\ell), \quad k = 1, \dots, n,\ i = k, \dots, n, \end{aligned}$$

gilt.

(10 Punkte)

Lösung. Die erste zu zeigende Gleichung ist klar. Nach dem ersten Schritt lautet das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & & & \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_1)(x_2 - x_0) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_n - x_0 & (x_n - x_1)(x_n - x_0) & \dots & \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta[x_1] - \delta[x_0] \\ \delta[x_2] - \delta[x_0] \\ \vdots \\ \delta[x_n] - \delta[x_0] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta[x_0, x_1](x_1 - x_0) \\ \delta[x_0, x_2](x_2 - x_0) \\ \vdots \\ \delta[x_0, x_n](x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

Vor dem k-ten Schritt lautet das Gleichungssystem (Induktionsvoraussetzung):

$$\begin{pmatrix} \prod_{\ell=0}^{k-2}(x_{k-1} - x_\ell) & & & \\ \prod_{\ell=0}^{k-2}(x_k - x_\ell) & \prod_{\ell=0}^{k-1}(x_k - x_\ell) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \prod_{\ell=0}^{k-2}(x_n - x_\ell) & \prod_{\ell=0}^{k-1}(x_n - x_\ell) & \dots & \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}] \prod_{\ell=0}^{k-2}(x_{k-1} - x_\ell) \\ \delta[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] \prod_{\ell=0}^{k-2}(x_k - x_\ell) \\ \vdots \\ \delta[x_0, \dots, x_{k-2}, x_n] \prod_{\ell=0}^{k-2}(x_n - x_\ell) \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite lautet *nach* dem k-ten Schritt

$$\begin{pmatrix} \big(\delta[x_0,\dots,x_{k-2},x_k]-\delta[x_0,\dots,x_{k-2},x_{k-1}]\big)\prod_{\ell=0}^{k-2}(x_k-x_\ell) \\ \big(\delta[x_0,\dots,x_{k-2},x_{k+1}]-\delta[x_0,\dots,x_{k-2},x_{k-1}]\big)\prod_{\ell=0}^{k-2}(x_{k+1}-x_\ell) \\ \vdots \\ \big(\delta[x_0,\dots,x_{k-2},x_n]-\delta[x_0,\dots,x_{k-2},x_{k-1}]\big)\prod_{\ell=0}^{k-2}(x_n-x_\ell) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta[x_0,\dots,x_{k-1},x_k](x_k-x_{k-1})\prod_{\ell=0}^{k-2}(x_k-x_\ell) \\ \delta[x_0,\dots,x_{k-1},x_{k+1}](x_{k+1}-x_{k-1})\prod_{\ell=0}^{k-2}(x_{k+1}-x_\ell) \\ \vdots \\ \delta[x_0,\dots,x_{k-1},x_n](x_n-x_{k-1})\prod_{\ell=0}^{k-2}(x_n-x_\ell) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta[x_0,\dots,x_{k-1},x_k]\prod_{\ell=0}^{k-1}(x_k-x_\ell) \\ \delta[x_0,\dots,x_{k-1},x_{k+1}]\prod_{\ell=0}^{k-1}(x_{k+1}-x_\ell) \\ \vdots \\ \delta[x_0,\dots,x_{k-1},x_n]\prod_{\ell=0}^{k-1}(x_n-x_\ell) \end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 2. (Äquidistante Stützstellen)

Zeige, dass bei äquidistanten Stützstellen $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,\dots,n$, $h > 0$, folgende Schreibweise für das interpolierende Polynom möglich ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} k! h^k \delta[x_0,\dots,x_k], \qquad \text{mit } s = \frac{x-x_0}{h}.$$

Dabei ist der Binomialkoeffizient durch

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

auch für $s \in \mathbb{R}$ definiert.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Lagrange-Polynome)

Seien x_i, $i = 0,\dots,n$ paarweise verschiedene Stützstellen und seien L_i, $i = 0,\dots,n$, die zugehörigen Lagrange–Polynome. Zeige

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Hermite-Interpolation)

Bestimme mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen das eindeutig bestimmte Hermite-Interpolationspolynom $p \in \Pi_6$, das folgenden Eigenschaften genügt.

$$\begin{aligned} p(-1) &= p(0) = p(1) = 0, \\ p'(-1) &= -p'(0) = p'(1) = -\pi, \\ p''(0) &= 0. \end{aligned}$$

(10 Punkte)