Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2010
Prof. Dr. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Mittwoch, 23.06.2010 (vor der Vorlesung)**.

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktion

$$f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin(x).$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_i^{(n)} \in [0,\pi]$, $i = 0,\dots,n$, gegeben und $p^{(n)} \in \Pi_n$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom zu diesen Daten. Zeige, dass die Folge $(p^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf dem Intervall $[0,\pi]$ gegen f konvergiert.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Gegeben sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\{1, \cos(jx), \sin(jx) \,:\, j = 1,\dots,m\}$ eine Basis des Raums T_{2m+1}^R ist, d.h. zeige, dass aus

$$a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

folgt, dass $a_0 = a_j = b_j = 0$, $j = 1,\dots,m$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. In Rechnern ist typischerweise für den Sinus eine Tabelle mit Stützwerten hinterlegt, anhand derer dann jeder beliebige Wert stückweise interpoliert werden kann. Wir nehmen hier äquidistante Stützstellen mit Abstand $h > 0$ an.

a) Wie groß muss h gewählt werden, damit die lineare Interpolation auf $m \in \mathbb{N}$ Stellen exakt ist, d.h. der Fehler höchstens $\frac{1}{2}10^{-m}$ beträgt?

b) Wie groß muss h gewählt werden, damit die kubische Interpolation auf $m \in \mathbb{N}$ Stellen exakt ist?

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Beispiel von Runge)

Gegeben sei die in der Vorlesung erwähnte Funktion

$$f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x^2)^{-1}.$$

Es seien $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[-5,5]$ äquidistant verteilte Stützstellen gegeben.

a) Werte mithilfe des Neville-Schemas das Interpolationspolynom p an der Stelle $x = 4.7$ für $n = 4, 10, 20, 50, 100$ aus und gib jeweils den Fehler $|p(x) - f(x)|$ an. Was ist zu beobachten?

b) Schreibe eine Funktion, die die Koeffizienten des Newton-Polynoms mithilfe des Schemas der dividierten Differenzen bestimmt.

c) Werte mithilfe des Horner-Schemas das Interpolationspolynom p für $n = 15$ an 1000 äquidistant auf dem Intervall $[-5, 5]$ verteilten Stellen x aus und ermittle den maximalen Fehler $|f(x) - p(x)|$.

(15 Punkte)

Abgabe innerhalb der Woche 21.06.–25.06.2010 im CIP-Pool