Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag, 19.10.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Normalengleichungen — ein physikalisches Ausgleichsproblem)

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls E und der POISSON-Querkontraktionszahl ν eines elastischen Materials wird eine quaderförmige Probe in achsenparalleler Lage mit den Normalspannungen σ_x, σ_y und σ_z belastet. Gemessen werden die resultierenden Dehnungen ϵ_x, ϵ_y und ϵ_z. Die Ergebnisse zweier Messungen lauten

1. Versuch:

	x	y	z
σ	1000	0	1000
ϵ	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$-3.02 \cdot 10^{-3}$	$3.08 \cdot 10^{-3}$

2. Versuch:

	x	y	z
σ	0	1000	0
ϵ	$-1.60 \cdot 10^{-3}$	$4.69 \cdot 10^{-4}$	$-1.54 \cdot 10^{-3}$

Angegeben ist hierbei die Spannung in $\mathrm{N/mm}^2$. Berechne die Größen E und ν so, dass das HOOKEsche Gesetz,

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{1}{E}\big(\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)\big),\\
\epsilon_y &= \frac{1}{E}\big(\sigma_y - \nu(\sigma_x - \sigma_z)\big),\\
\epsilon_z &= \frac{1}{E}\big(\sigma_z - \nu(\sigma_x - \sigma_y)\big),
\end{aligned}$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadratsumme bestmöglich erfüllt ist!

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Fehlende Eindeutigkeit bei Gleichungssystemen)

Es seien eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rank} A = n-1$ sowie eine rechte Seite $b \in \mathbb{C}^n$ derart gegeben, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist. Desweiteren sei ein Vektor $w \neq 0$ bekannt, für den $Aw = 0$ gilt. (Damit ist w ein Basisvektor für den Kern von A, der wegen obiger Rangbedingung eindimensional ist. Die Lösungsmenge $Ax = b$ ist mithin ebenso eindimensional und x insbesondere nicht eindeutig.) Zeige:

a) Das erweiterte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & v \\ w^H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn v nicht im Bild von A ist. Der Lösungsvektor x erfüllt auch die ursprüngliche Gleichung $Ax = b$.

Ist A zusätzlich hermitesch, d.h. $A^H = A$, so garantiert die Wahl $v := w$ die Eindeutigkeit.

b) Das regularisierte Gleichungssystem

$$(A + vw^H)x = b$$

ist eindeutig lösbar, falls $v \neq 0$ im Kern von A^H ist. Der Lösungsvektor x erfüllt auch die ursprüngliche Gleichung $Ax = b$.

Ist A zusätzlich positiv semidefinit, d.h. $x^H Ax \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{C}^n$, so ist $A + ww^H$ positiv definit.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Konditionszahl bei Ausgleichsproblemen)

Diese Aufgabe soll verdeutlichen, dass sich beim Übergang zu den Normalengleichungen die Kondition einer Matrix signifikant verschlechtert. Die Rechnungen in (a) sollten mit einer geeigneten Software (Matlab / Octave, Mathematica / Maple o.ä.) durchgeführt werden.

a) Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \overset{!}{=} \min$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.999 & 1.001 \\ 1.001 & 0.999 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 0.667 \\ 0.667 \end{pmatrix}.$$

Berechne eine Lösung des eigentlichen sowie eine Lösung des mit $\Delta b = (0, -0.001, 0)^T$ gestörten Problems $\|A\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 \overset{!}{=} \min$, $\tilde{b} = b + \Delta b$!

Berechne desweiteren die Residuen $r := \|Ax - b\|_2$ und $\tilde{r} := \|A\tilde{x} - \tilde{b}\|_2$ sowie die Kondition von A und $A^T A$! Vergleiche!

b) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A. Zeige, dass

$$\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(R) = \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(A), \quad \text{wohingegen} \quad \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(A^T A) = \left[\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(A)\right]^2 !$$

Hinweis: Für die zweite Gleichung kann zunächst folgendes gezeigt werden:

(1) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^k ein Eigenwert von A^k.

(2) Ist λ ein nichtverschwindender Eigenwert des Produkts AB zweier beliebiger Matrizen, so ist λ auch ein Eigenwert von BA.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe. (Praktische Berechnung einer Kleinste-Quadrate-Lösung)

Zu programmieren ist folgendes Verfahren zur Bestimmung einer Lösung des Ausgleichsproblems $\|Ax - b\| \stackrel{!}{=} \min$ bei gegebenem $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rang} A = p$, und $b \in \mathbb{R}^m$:

1. Berechne eine spaltenpivotisierte QR-Zerlegung von A, sodass $QAP = \left(\begin{smallmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit einer Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und einer Matrix $S \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$.

2. Berechne $V \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$ aus $RV = S$.

3. Berechne die Cholesky-Zerlegung von $I + V^T V$, sodass $LL^T = I + V^T V$.

4. Setze $[b_1, b_2]^T = Qb$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^p$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{m-p}$.

5. Berechne $u \in \mathbb{R}^p$ aus $Ru = b_1$.

6. Berechne $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$ aus $LL^T x_2 = V^T u$.

7. Setze $x_1 = u - Vx_2$. Damit ist $P^{-1}x$, $x := [x_1, x_2]^T$, das Ergebnis des Verfahrens.

Teste dein Programm am Beispiel aus Aufgabe 1!
Hinweis: Hierbei vereinfacht sich der Algorithmus, da die Permutation sowie die Schritte 2, 3 und 6 entfallen. (Es ist $n = p = 2$ und damit $S, V \in \mathbb{R}^{2\times 0}$, d.h. $x_2 \in \mathbb{R}^0$.) Wann tritt x_2 zutage?
Bemerkung: Dass der angegebene Algorithmus auch tatsächlich eine und sogar die gewünschte eindeutige Lösung liefert, wird in der Vorlesung gezeigt.

(4 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe vom 18.10. – 22.10.2010 im CIP-Pool, Wegelerstraße 6

Die Kriterien für die Zulassung zur Klausur lauten wie folgt:

- Für jede Aufgabe werden vier Punkte veranschlagt. Pro Blatt gibt es entweder vier Theorieaufgaben oder eine Programmieraufgabe und drei Theorieaufgaben. Programmieraufgaben gibt es voraussichtlich auf jedem zweiten Übungsblatt.
- Programmieraufgaben und sonstige Aufgaben werden getrennt gewertet. Übers ganze Semester müssen jeweils 50% der zu erreichenden Punkte gesammelt werden.
- Regelmäßige Teilnahme am Tutorium sollte nicht allein als Pflicht angesehen werden sondern vielmehr als Handreichung, die die Bearbeitung der nächsten Übungsserie und die Vor- bzw. Nachbereitung des Stoffs erleichern will.
- Die Abgabe der Programme erfolgt im CIP-Pool (`http://cip.iam.uni-bonn.de`). Der gewünschte Abgabetermin soll in der Woche vor der Abgabe in die im CIP-Pool ausgehängten Listen eingetragen werden. Die CIP-Pool-Betreuer stehen für Fragen rund um die Programmieraufgaben zur Verfügung und werden insbesondere dafür bezahlt, euch bei der Bearbeitung derselben zu helfen.

Ob Gruppenabgaben zulässig sind, wird in der ersten Vorlesung mitgeteilt.