Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag, 26.10.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Bestimmung des Matrixkerns)

Es seien eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank} A = n \leq m$ sowie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben, sodass $A = QR$ ist (sog. QR-Zerlegung von A). Zeige:

a) Die Matrix $\hat{Q} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, die aus den ersten n Spalten von Q gebildet wird, besitzt dasselbe Bild wie die Matrix A, d.h. es gilt $\operatorname{Ran} A = \operatorname{Ran} \hat{Q}$.

b) Die letzten $m - n$ Spalten von Q bilden eine orthogonale Basis von $\operatorname{Ker} A^H$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Lösen linearer Ausgleichsprobleme)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank} A = n \leq m$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Betrachtet wird das Problem

$$\|Ax - b\|_2 \overset{!}{=} \min. \qquad (*)$$

Um $(*)$ praktisch zu lösen, wird oft von einer reduzierten QR-Zerlegung der gegebenen Matrix A ausgegangen (Kondition!). Dazu setzt man $\hat{Q}^H b = [c, d]^T$ und erhält $x_{\min}$ durch Rückwärtseinsetzen aus $\hat{R}x = c$.

a) Eine zweite Möglichkeit besteht darin, eine reduzierte QR-Zerlegung der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A, b]$ in der Form

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Q} & q_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{R} & z \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Anschließend berechnet man x_{a} aus $\hat{R}x = z$. Zeige, dass x_{a} tatsächlich das Problem $(*)$ löst und $\rho = \|Ax_{\mathrm{a}} - b\|_2$ gilt!

b) Betrachte nun als dritte Variante das erweiterte System

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und passenden Vektoren r und x. Zeige, dass das System stets eine eindeutige Lösung besitzt und dass diese Lösung aus den Komponenten x_{b} und r_{b} besteht, wobei x_{b} die Lösung des Ausgleichsproblems $(*)$ ist und r_{b} das Residuum $b - Ax_{\mathrm{b}}$!

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (QR-Zerlegung nach Householder — ein weiteres Ausgleichsproblem)

Gegeben seien die folgenden Messwerte für zwei Größen x und y:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
x_i	$1/2$	1	$-1/2$
y_i	1	$\sqrt{3}$	2

Aufgrund theoretischer Betrachtungen ist bekannt, dass x und y folgendem Zusammenhang genügen:

$$\alpha/x + \beta y^2 = c,$$

wobei c eine reelle Konstante ist. Die reellen Parameter α und β sollen optimal im Sinne des Kleinste-Quadrate-Fehlers bestimmt werden.

Wie lautet ein gleichwertiges lineares Ausgleichsproblem? Bestimme die Lösung dieses Problems mithilfe einer QR-Zerlegung nach Householder (vgl. Kap. 6.6 der Vorlesung „Algorithmische Mathematik I“)!

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Pseudoinverse)

Die sogenannte Pseudoinverse A^+ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist eindeutig bestimmt durch die vier folgenden sogenannten Penrose-Bedingungen:

$$\begin{array}{ll}
(1) & A^+A = (A^+A)^H \\
(2) & AA^+ = (AA^+)^H \\
(3) & A^+AA^+ = A^+ \\
(4) & AA^+A = A
\end{array}$$

Zeige am Beispiel der singulären Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

dass die Gleichung $(AB)^+ = B^+A^+$ für diese verallgemeinerte Inverse im Allgemeinen nicht gilt!

(4 Punkte)