Einführung
in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Dienstag, 2.11.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Eindeutigkeit der Singulärdarstellung)

Zeige im Beweis des folgenden Satzes (er entspricht der Bemerkung vor Satz 1.10 aus der Vorlesung) die Teilaussagen (a) – (e)!

Satz. Die Singulärwerte σ_i einer Matrix sind eindeutig bestimmt. Die zu σ_i gehörenden Singulärvektoren u_i (links) und v_i (rechts) sind genau dann bis auf einen skalaren Faktor vom Betrag eins eindeutig, wenn $\sigma_j \neq \sigma_i$ für alle j.

Beweis. Angenommen, es gibt neben v_1 einen weiteren, von v_1 linear unabhängigen Vektor $\tilde{v}$ mit $\|\tilde{v}\|_2 = 1$ und $\|A\tilde{v}\|_2 = \sigma_1$, dann wird gezeigt, dass σ_1 mehr als einmal unter den Singulärwerten auftauchen muss. Der Rest ergibt sich per Induktion. Doch der Reihe nach.

a) Der Singulärwert σ_1 ist in jedem Falle eindeutig bestimmt.

Mit $\tilde{v}$ wie oben betrachte nun

$$\tilde{v}_1 := \frac{\tilde{v} - (v_1^H \tilde{v}) v_1}{\left\|\tilde{v} - (v_1^H \tilde{v}) v_1\right\|_2}.$$

Dieser Vektor ist per Definition normiert und steht senkrecht auf v_1.

b) Umgekehrt ist $\tilde{v} = c v_1 + s \tilde{v}_1$ mit Konstanten c und s, für die $|c|^2 + |s|^2 = 1$.

c) Es gilt $\|A\tilde{v}_1\|_2 = \sigma_1$.

Damit ist $\tilde{v}_1$ ein zweiter rechter Singulärvektor bezüglich σ_1.

d) Das bedeutet aber $\sigma_1 = \sigma_2$.

e) Damit gilt die Aussage des Satzes für σ_1, v_1 und u_1.

Der Rest der Zerlegung ist bestimmt durch die Wirkung der Matrix A auf den zu v_1 orthogonalen Raum. Da v_1 bis auf Multiplikation mit einem Skalar vom Betrag eins festgelegt ist, ist dieser Orthogonalraum eindeutig bestimmt und die Eindeutigkeit der verbleibenden Singulärwerte und -vektoren folgt nun per Induktion. □

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse von 2×2-Matrizen)

Berechne per Hand die Singulärwertzerlegung der folgenden Matrizen und bestimme aus dieser anschließend die jeweilige Pseudoinverse.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis zu (c) *und* (d): Berechne zunächst die Singulärwerte!

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Zusammenhang zwischen Pseudoinverse und Minimierungsproblem)

Zeige, dass für die zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $m \geq n$, gehörende Pseudoinverse $A^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gerade

$$\left\|AA^+ - I\right\|_F = \min_{X\in\mathbb{K}^{n\times m}} \|AX - I\|_F$$

gilt, wobei $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die Einheitsmatrix bezeichne.
Hinweis: Wie entsteht A^+ aus einer Singulärwertzerlegung von A?

(4 Punkte)

Programmieraufgabe. (Orthogonalisierungsverfahren)

Zur Orthogonalisierung (bzw. Orthonormalisierung) einer gegebenen Menge von Vektoren sollen die folgenden Verfahren miteinander verglichen werden:

a) das klassische Verfahren von Gram-Schmidt,

b) das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren bzw.

c) die QR-Zerlegung nach Householder.

Dabei ergibt sich die Methode zur Orthonormalisierung von n gegebenen Vektoren der Länge m in (c) sofort aus Aufgabe 1 vom letzten Blatt.
Schreibe ein Programm, das die drei genannten Verfahren umsetzt! Die Ausgabe soll aus den orthonormierten Vektoren und ihren wechselseitigen Skalarprodukten bestehen. Teste die Routinen mit folgenden Beispielen:

(i) $x_1 = (11, 2, 3, 4)^T$, $x_2 = (2, 3, 44, 5)^T$, $x_3 = (3, 44, 5, 6)^T$, $x_4 = (4, 5, 6, 77)^T$

(ii) $x_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $x_2 = (2, 3, 4, 5)^T$, $x_3 = (3, 4, 5, 6)^T$, $x_4 = (4, 5, 6, 7)^T$

(iii) $x_1 = (1, 10^{-10}, 0, 0)^T$, $x_2 = (1, 0, 10^{-10}, 0)^T$, $x_3 = (1, 0, 0, 10^{-10})^T$, $x_4 = (1, 0, 1, 1)^T$

Vergleiche die drei Methoden hinsichtlich Güte und Aufwand!

(4 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe vom 01.11. − 05.11.2010 im CIP-Pool, Wegelerstraße 6