Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 9.11.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Iterative Bestimmung von A^+)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $m \geq n$, mit $\operatorname{rank} A = r$ gegeben. Betrachte nun die Abbildung $B : (0,\infty) \to \mathbb{K}^{n\times m}$ mit

$$B(t) := (A^H A + tI)^{-1} A^H, \qquad t > 0,$$

wobei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichne. Zeige, dass

$$\left\| B(t) - A^+ \right\|_2 = \frac{t}{\sigma_r(\sigma_r^2 + t)}$$

ist! Insbesondere gilt somit $\lim_{t\to 0} B(t) = A^+$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Lineare Konvergenz des Regula-falsi-Verfahrens)

Zeige den folgenden Satz aus der Vorlesung!

> **Satz 2.8.** Es sei $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ mit $f(a)f(b) < 0$ sowie $f'(y) \neq 0$ und $f''(y) \neq 0$ für alle $y \in [a,b]$. Dann gibt es ein $L \in [0,1)$, sodass für die durch die Regula falsi erzeugten $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$
>
> $$\text{entweder} \quad |a_{k+1} - x| \leq L\,|a_k - x| \quad \text{oder} \quad |b_{k+1} - x| \leq L\,|b_k - x|$$
>
> gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Newton-Verfahren für Polynome)

Es sei p ein reelles Polynom mindestens zweiten Grades, das nur reelle Nullstellen besitzt. Zeige: Dann liefert das Newton-Verfahren für jeden Startwert, der größer ist als die größte Nullstelle, eine gegen diese Nullstelle konvergente, streng monoton fallende Folge.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (HERON-Verfahren)

Es soll ein iterativer Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel einer beliebigen positiven Zahl c erstellt werden, beispielsweise als Funktion für einen Taschenrechner. Dabei löst der Rechner die Gleichung

$$x^2 - c = 0, \qquad c \in (0, \infty).$$

Die Zahl c werde in Gleitkommaarithmetik in der Form

$$c = m \cdot 2^e, \qquad m \in (0.5, 1],$$

dargestellt, wobei m die Mantisse und $e \in \mathbb{N}$ den Exponenten bezeichne.

a) Gib ausgehend von der obigen Darstellung ein Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{c}$ an. Dieses Verfahren soll aus einem Vorverarbeitungsschritt für die Mantisse und einer anschließenden NEWTON-Iteration bestehen.

b) Führe vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit $x_0 := 1$ bzw. $x_0 = 0.5$ durch!

c) Zeige nun direkt, dass dieses so konstruierte Verfahren quadratisch gegen die Zahl $\sqrt{c}$ konvergiert! Wie ist dafür der Startwert zu wählen? Was passiert, wenn der Startwert x_0 negativ gewählt wird?

(4 Punkte)