Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag, 16.11.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Verfahren höherer Ordnung)

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe an der Stelle x eine einfache Nullstelle. Außerdem sei f in einer Umgebung $U_r(x) := \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r\}$ zweimal stetig differenzierbar.
Zeige direkt, dass das Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} y_k &:= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &:= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

lokal mindestens kubisch gegen x konvergiert!
Hinweis: Mehrfache Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Schulz-Iteration zur Bestimmung der Matrixinversen)

Die Inverse der regulären Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$F(X) := X^{-1} - A = 0.$$

Die Anwendung des Newton-Verfahrens auf F führt auf die Iteration

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k) = X_k(2I - AX_k).$$

Im folgenden wird gezeigt: Für jede Startmatrix $X_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|I - AX_0\| \le q < 1$ konvergiert das sich ergebende Verfahren quadratisch gegen A^{-1}, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige submultiplikative Matrixnorm bezeichne.

a) Zeige zunächst: Es gilt

$$\left\|X_k - A^{-1}\right\| \le \frac{\|X_0\|}{1-q} \|I - AX_k\|.$$

b) Folgere nun aus der Ungleichung

$$\|I - AX_k\| \le q^{2^k}$$

die quadratische Konvergenz des Verfahrens!

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Modifiziertes NEWTON-Verfahren)

Wie in Beispiel 2.12 aus der Vorlesung wird $f(t) = \arctan t$ mit der einzigen Nullstelle $t^* = 0$ betrachtet.

a) Zeige, dass das NEWTON-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle von f für jeden Startwert $t_0 \neq 0$ eine Folge $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit alternierendem Vorzeichen erzeugt!

b) Es sei die Funktion $g\colon t \mapsto \tan \frac{2t}{1+t^2}$ auf $(0, \infty)$ gegeben. Zeige, dass das NEWTON-Verfahren für f genau für die $t_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert, für die $|t_0| < g(|t_0|)$ gilt!

   Hinweis: Ohne Beweis kann verwendet werden, dass g folgende Eigenschaften hat: Es existiert genau ein $s \in (0, \infty)$ mit $s = g(s)$ und es gilt $t \in (0, s)$ genau dann, wenn $t < g(t)$. Erstelle mit einem geeigneten Hilfsmittel (WolframAlpha, Octave, Gnuplot) einen Plot von g, um dir diesen Zusammenhang zu vergegenwärtigen!

c) Zeige, dass es kein $0 < \lambda \leq 1$ gibt, sodass das Verfahren

$$t_{k+1} = t_k - \lambda \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}$$

   global konvergent ist!

   Hinweis: Zeige, dass es für jedes $\lambda \in (0, 1]$ ein $R(\lambda) > 0$ gibt, sodass für alle t_k mit $|t_k| > R(\lambda)$ folgt, dass $|t_{k+1}| > |t_k|$ ist!

(4 Punkte)

Programmieraufgabe. (Nichtlineare Nullstellenbestimmung)

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Schreibe ein Programm zur Berechnung einer Nullstelle von f, an der ein Vorzeichenwechsel stattfindet! Dazu sollen die in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zur Anwendung kommen:

a) Bisektionierung

b) Regula falsi

c) Sekantenverfahren

d) NEWTON-Verfahren

Das Programm soll abbrechen, wenn $|f(x_k)| < 10^{-10}$ oder wenn mehr als 200 Schritte durchgeführt wurden. Im Fall $x_k \notin [0, 1]$ soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden.
Teste die Algorithmen an folgenden Funktionen:

(i) $f_n(x) := \mathrm{e}^{nx} - \mathrm{e}^{\frac{2}{7}n}, \quad n = 2, 5, 10$

(ii) $g_n(x) := \dfrac{1 - 3x}{1 + nx}, \qquad n = 2, 5, 10$

Verwende 0 und 1 als Startwerte für die Verfahren (a) bis (c) bzw. 0 oder 1 für (d)!
Vergleiche abschließend noch einmal alle besprochenen Verfahren hinsichtlich Konvergenzbereich, Konvergenzordnung, Effizienz und der nötigen Voraussetzungen an f!

(4 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe vom 15.11. – 19.11.2010 im CIP-Pool, Wegelerstraße 6