Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag, 23.11.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Spezielles Iterationsverfahren)

Mit einem $a > 0$ sei

$$f(x) := \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}.$$

Zeige, dass für hinreichend nahe bei $\sqrt{a}$ gelegene Startwerte x_0 die durch

$$x_{k+1} := f(x_k)$$

definierte Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von mindestens dritter Ordnung gegen $\sqrt{a}$ konvergiert!

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Konvergenzbeschleunigung für Iterationsverfahren)

a) Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{x\}$ eine gegen x konvergierende Folge, für die

$$x_{n+1} - x = (q + \delta_n)(x_n - x)$$

gilt, wobei q eine reelle Zahl mit $|q| < 1$ und $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Zeige: Für genügend großes m exisitert die Folge $\{y_n\}_{n>m}$ mit

$$y_n := x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - x}{x_n - x} = 0.$$

b) Gegeben sei nun ein Intervall I und eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi\colon I \to I$ mit $|\Phi'(x)| < 1$ für alle $x \in I$.

Zeige, dass die durch $x_0 \in I$, $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ gegebene Folge gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt x von Φ konvergiert und die Voraussetzungen aus Teil (a) erfüllt!

c) Zeige: Ist in (b) sogar $-1 < \Phi'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, so gilt

$$(x_{n+1} - x)(x_n - x) \leq 0 \quad \text{und} \quad |x_n - x| \leq |x_n - x_{n-1}|\,.$$

Bemerkung: Die Transformation $x_n \to y_n$ in (a) entspringt der sogenannten Δ^2-Methode von Aitken. In (b) wird gezeigt, dass ein durch Φ definiertes Iterationsverfahren mit dieser Methode beschleunigt werden kann; Teil (c) liefert eine Fehlerabschätzung.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Abstiegsverfahren)

Es sei mit einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das Funktional $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(z) := \frac{1}{2}(Az-b)^T A^{-1}(Az-b)$$

gegeben. Als Abstiegsrichtung wählt man in jedem Schritt der folgenden Iteration

$$p_k := -\nabla f(x_k).$$

a) Es sei $r_k := b - Ax_k$. Zeige, dass das Minimum t_k der Funktion $t \mapsto f(x_k + t\cdot p_k)$ gerade bei $\frac{(r_k,r_k)}{(r_k,Ar_k)}$ angenommen wird!

b) Zeige, dass für die Iteration $x_{k+1} := x_k + t_k \cdot p_k$, $k \in \mathbb{N}$, mit t_k aus (a) die Gleichung

$$\|x_{k+1} - x\|_A^2 = c \cdot \|x_k - x\|_A^2\,, \qquad c := 1 - \frac{\|r_k\|^4}{(r_k, Ar_k)(r_k, A^{-1}r_k)},$$

gilt, wobei x die exakte Lösung des Problems $Az = b$ bezeichne!

c) Es bezeichne $\kappa \in \mathbb{R}$ die Kondition von A. Zeige: Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x_k - x\|_A \le \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k \|x_0 - x\|_A\,.$$

Hinweis: Für jede positiv definite Matrix A gilt die Ungleichung

$$\frac{(z,Az)(z,A^{-1}z)}{(z,z)^2} \le \left(\frac{1}{2}\sqrt{\kappa} + \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^{-1}}\right)^2$$

für alle $z \neq 0$ (vgl. Vorbereitung in den Übungsgruppen); $\frac{(\kappa-1)^2}{(\kappa+1)^2} = 1 - \frac{4}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa^{-1}}}$.

d) Zur Bestimmung stationärer Punkte wird das NEWTON-Verfahren auf die Funktion ∇f anwendet. Wieviel Schritte sind höchstens vonnöten?

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Nichtlineares Ausgleichsproblem)

Von folgenden (ungenauen) Messdaten ist bekannt, dass sie auf einem Kreis liegen:

x_i	-5	-3	0	8	13
y_i	-9	-2	-14	4	-1

Es sollen Radius und Mittelpunkt desjenigen Kreises bestimmt werden, der „am besten" zu den Messdaten passt.

a) Stelle ein nichtlineares Minimierungsproblem für die gesuchten Parameter auf!

b) Linearisiere das Problem aus (a) mit einer geeigneten Substitution und bestimme die Lösung dieses Problems!

c) Führe einen Iterationsschritt des GAUSS-NEWTON-Verfahrens für das in (a) aufgestellte Ausgleichsproblem aus! Wähle dabei als Startwert das Ergebnis aus (b)!

Die Lösung für Teil (b) (z.B. von Octave im `format long`) lautet
$x_m = 4.90839297332466, y_m = -5.80689655172414, r = 9.70505208778129.$

(4 Punkte)