Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 30.11.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Lineare Minimierung unter Nebenbedingungen)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank} A = n \leq m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\operatorname{rank} C = p < n$, sowie ein Vektor $d \in \mathbb{R}^p$ gegeben. Gesucht ist die Lösung x_{min} des linearen Ausgleichsproblems $\frac{1}{2}\|b - Ax\|_2^2 \to \min$ unter allen x, für die auch die (lineare) Nebenbedingung $Cx = d$ erfüllt ist.

Zeige, dass die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} I & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^H & C^H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \lambda \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

gerade der Lösung der oben beschriebenen Minimierungsaufgabe entspricht!

Bemerkung: Man beachte die Ähnlichkeit zum System in Aufgabe 2b vom 2. Übungsblatt!

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Gauss-Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ \lambda x^2 + x - 1 \end{pmatrix},$$

wobei λ ein reeller Parameter ist, sowie das zugehörige Minimierungsproblem

$$g(x) := \frac{1}{2}\big\|f(x)\big\|_2^2 \to \min .$$

a) Zeige: Für $\lambda < 1$ besitzt g ein lokales Minimum bei $x = 0$; dieses Minimum ist eindeutig, wenn $\lambda < 7/16$ ist.

b) Formuliere das Gauss-Newton-Verfahren zur Minimierung von g als Fixpunktverfahren der Form $x_{k+1} = \Phi(x_k)$!

   Hinweis: Es kann zunächst gezeigt werden: Die Pseudoinverse eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, ist gerade $v^H/(v^H v)$. (Prüfe die definierenden Bedingungen!)

c) Weise nach, dass $x = 0$ für $\lambda < -1$ ein abstoßender Fixpunkt ist, d.h., dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|x_{k+1}| > |x_k| \qquad \text{für alle } x_k \text{ mit } 0 < |x_k| < \delta!$$

d) Zeige: Für $|\lambda| < 1$ ist das Gauss-Newton-Verfahren konvergent. Welche Konvergenzordnung liegt in diesem Falle vor?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Hebden-Verfahren)

In dieser Aufgabe wird das Hebden-Verfahren eingeführt, das zur Lösung spezieller rationaler, nichtlinearer Gleichungen genutzt wird. Derartige Gleichungen können sich beispielsweise aus dem Levenberg-Marquardt-Verfahren ergeben, vgl. (2.39) aus der Vorlesung.

a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav mit (eindeutiger) Nullstelle $x^* \in I$. Zeige, dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \leq x^*$ aus I monoton gegen x^* konvergiert!

   Bemerkung: Man beachte die Ähnlichkeit zu Aufgabe 3 vom 4. Übungsblatt!

b) Es sei mit $z_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$, $d_1 > d_2 > \dots > d_n > 0$ und $\rho > 0$

$$r(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{(d_i + x)^2},$$

   wobei $r(0) > \rho$ gelten soll. Um die Gleichung

$$r(x) = \rho$$

   zu lösen, wird nun das Newton-Verfahren auf die Funktion

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{r(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

   angewendet. Zeige, dass das sich dadurch ergebende Verfahren für den Startwert $x_0 := 0$ konvergiert!

(4 Punkte)

Programmieraufgabe. (Nichtlineare Minimierung)

Implementiere die folgenden in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zur nichtlinearen Ausgleichsrechnung:

a) BFGS-Verfahren

b) Gauss-Newton-Verfahren mit Schrittweitensteuerung nach Armijo-Goldstein

Bei Abgabe als Zweiergruppe soll jeder der beiden Studenten eines der angegebenen Verfahren implementieren, Einzelabgeber können sich eines aussuchen.

Teste die Algorithmen anhand folgender aktueller Problemstellung:
Einige Liter (alkoholfreien) Punschs werden bis zum Siedepunkt bei etwa 96 °C erhitzt. Danach wird das Getränk auf einem Stövchen aufbewahrt. Wegen der geringeren Heizleistung des Teelichts nimmt die Temperatur der Flüssigkeit langsam ab. Das ist gut, denn der Punsch kann wegen der Gefahr einer Verbrennung erst getrunken werden, wenn er weniger als 60 °C hat. Um den richtigen Zeitpunkt vorherzusagen, wann diese Temperatur erreicht ist, wird eine Messreihe durchgeführt. Man platziert dazu ein Thermometer in der Mitte der Kanne und bestimmt (mithilfe einer Uhr) jeweils die Zeit, zu der die Temperaturen 95 °C, 90 °C, ..., 65 °C unterschritten wurden. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

T (in °C)	95	90	85	80	75	70	65
t (in s)	30	125	225	367	535	740	990

Frühere Erfahrungen mit Punsch haben ergeben, dass beim Abkühlungsprozess zwischen Zeit und Temperatur ein exponentieller Zusammenhang besteht, d.h., dass

$$T(t) = a + b\mathrm{e}^{-ct}.$$

Bestimme die Modellparameter a, b und c aus den gegebenen Daten, indem du ein geeignetes Ausgleichsproblem löst!
Ab wann kann der Punsch getrunken werden? Welche Minimaltemperatur wird erreicht?

Lösung zum Vergleich: Es ergibt sich $a = 53.6581$, $b = 42.8294$ und $c = 0.0013$. Die Trinktemperatur wird nach etwa 24 Minuten erreicht und für $t \to \infty$ nähert sich die Temperatur dem Wert 53 °C an. (alle Angaben ohne Gewähr)

(4 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe vom 29.11. – 03.12.2010 im CIP-Pool, Wegelerstraße 6