# Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

## Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 14.12.2010** (vor der Vorlesung)

**Aufgabe 1.** (Rayleigh-Quotient)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $(\lambda, x)$ ein zu $A$ gehörendes Eigenpaar. Zeige für den Rayleigh-Quotienten $\mu_A$ folgende Störungseigenschaften: Es gilt

a) $|\mu_A(x+h) - \mu_A(x)| = \mathcal{O}(\|h\|)$ für $h \to 0$,

b) $|\mu_A(x+h) - \mu_A(x)| = \mathcal{O}(\|h\|^2)$ für $h \to 0$, falls $A$ hermitesch ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.** (Eigenpaarberechnung mittels Newton-Verfahren)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix. Zur Bestimmung eines normierten Eigenvektors $x$ von $A$ sowie des zugehörigen Eigenwerts $\lambda$ kann man versuchen, das nichtlineare Problem

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)x &= 0\\ x^T x &= 1\end{aligned}$$

zu lösen.
Bestimme die Iterationsgleichung, die sich durch Anwendung des Newton-Verfahrens auf dieses System ergibt! (Beachte dabei: Die Funktion, auf die das Verfahren angewendet wird, muss von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$ abbilden.)
Vergleiche sie mit der inversen Iteration mit Spektralverschiebung (Shift)!

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.** (Vektoriteration für hermitesche Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ und zugehörigen normierten Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$. Mithilfe des Algorithmus für das Verfahren der sog. Vektoriteration

| |
|---|
| Gegeben sei ein Startvektor $x_0$ mit $\|x_0\|_2 = 1$.<br>`For` $k = 1, 2, \ldots$ `{`<br>   $y_k := Ax_{k-1}$;<br>   $x_k := y_k / \|y_k\|_2$;<br>`}` |

berechnet man eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Näherungen an $v_1$. Zeige, dass mit $q := |\lambda_2/\lambda_1|$

$$|\mu_A(x_k) - \lambda_1| = \mathcal{O}(q^{2k})$$

gilt!
*Hinweis:* Nutze aus, dass für hermitesche Matrizen die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis bilden.

(4 Punkte)

**Programmieraufgabe.** (Unsymmetrische Eigenwertprobleme)

Implementiere die folgenden in der Vorlesung vorgestellten, einfachen Verfahren zur Behandlung unsymmetrischer Eigenwertprobleme:

a) Vektoriteration nach von Mises

b) Inverse Iteration nach Wielandt

c) Rayleigh-Quotienten-Verfahren.

Einzelabgeber können entweder (a) oder (b) weglassen.

Teste die Algorithmen an folgendem Problem:
Zu Weihnachten beschenken sich die Mitglieder der Familie Meier, bestehend aus den Geschwistern Tim und Lisa sowie ihren Eltern. Jedes Kind bekommt ein Geschenk von den Eltern. Weil Tim beim Holzhacken im Herbst eine unerlässliche Hilfe war, bekommt er von seinem Vater ein weiteres Geschenk. Beide Kinder haben jeweils etwas für Mutti und Vati gebastelt. Die Mutter erfreut ihren Mann mit einer Kleinigkeit, umgekehrt ist dies nicht der Fall. Außerdem bekommt Lisa noch ein Bild von Tim überreicht. Am 1. Weihnachtsfeiertag streiten die Kinder über die Frage, wer wohl das beliebteste Familienmitglied sei.
Um Lisa und Tim zu helfen, führen wir nichtnegative Beliebtheitsvariablen $x_T, x_L, x_M, x_V$ ein. Ist $n_A$ die Anzahl der Geschenke, die die Person $A$ insgesamt verteilt, so soll sich die Beliebtheit $x_B$ von Person $B$ um den Wert $x_A/n_A$ erhöhen, sofern $A$ ein Geschenk an $B$ überreicht hat, das heißt, es gilt z. B. $x_T = 0/2 \cdot x_L + 1/4 \cdot x_M + 3/4 \cdot x_V$.
Zeige, dass sich das Beliebtheitsproblem als Eigenwertaufgabe $\lambda x = Ax$ mit $\lambda = 1$ formulieren lässt! Verwende den Gerschgorinschen Kreissatz für $A^T$, um zu zeigen, dass $|\lambda| \leq 1$ für alle Eigenwerte von $A$ gilt. Zeige außerdem, dass $\lambda = 1$ Eigenwert von $A^T$ bzw. von $A$ ist.
Verwende als Startvektor $x_0 := \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, um einen Eigenvektor zu approximieren!
Wer muss gemäß diesem Modell als beliebtestes Familienmitglied angenommen werden?

Lösung zum Vergleich: Es ergibt sich $(x_T, x_L, x_M, x_V) \approx (0.5472, 0.4311, 0.3980, 0.5969)$
(alle Angaben ohne Gewähr)

(4 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe vom 15.12. – 22.12.2010 im CIP-Pool, Wegelerstraße 6