Einführung
in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag, 21.12.2010** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Blockmatrixinverse)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit der Blockstruktur

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{ii} \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i},$$

und A_{11} regulär. Dann existiert die Matrix $S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \in \mathbb{K}^{n_2\times n_2}$.

a) Zeige, dass S genau dann invertierbar ist, wenn A invertierbar ist.

   Hinweis: Zeige, dass $\det A = \det A_{11} \det S$ gilt!

b) Es gelte (a). Gib eine Darstellung von A^{-1} in Blockstruktur an!

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Abstand von Unterräumen)

Es seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ zwei p-dimensionale Unterräume des $\mathbb{C}^n$ mit Basen $\{u_1, \ldots, u_p\}$ bzw. $\{v_1, \ldots, v_p\}$. Mit den Matrizen $U := (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{C}^{n\times p}$ und $V := (v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{C}^{n\times p}$ definiert man orthogonale Projektoren auf $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{V}$ vermittels

$$P_{\mathcal{U}} := U(U^H U)^{-1}U^H, \qquad P_{\mathcal{V}} := V(V^H V)^{-1}V^H.$$

D. h., es ist $P_{\mathcal{U}}x \in \mathcal{U}$ und $x - P_{\mathcal{U}}x \in \mathcal{U}^\perp$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Dann nennt man

$$d(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \|P_{\mathcal{U}} - P_{\mathcal{V}}\|_2$$

Abstand zwischen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$. Zeige:

a) Der Abstand ist unabhängig von der Wahl der Basen zu den Unterräumen.

b) Durch d ist eine Metrik auf der Menge der p-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{C}^n$ gegeben.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Orthogonale Iteration — Konvergenzbeweis)

Eine Verallgemeinerung der Vektoriteration stellt das sog. Verfahren der orthogonalen Iteration dar. Ein möglicher Algorithmus lautet:

> Gegeben sei eine Startmatrix $X_0 \in \mathbb{C}^{n\times p}$ mit $X_0^H X_0 = I$.
> `For` $k = 1, 2, \ldots$ `{`
> $\quad Y_k := AX_{k-1};$
> $\quad$ berechne eine QR-Zerlegung $X_k R_k = Y_k$;
> `}`

Damit ist $Y_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $X_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$ sowie $R_k \in \mathbb{C}^{p\times p}$, und es gilt $X_k^H X_k = I \in \mathbb{C}^{p\times p}$, d.h., die (reduzierte) QR-Zerlegung ersetzt den Normierungsschritt. (Vergleiche auch mit dem Algorithmus in Aufgabe 3 vom 9. Übungsblatt!) Es sei $\mathcal{X}_k := \operatorname{Ran} X_k$ der von den Spalten von X_k aufgespannten Unterraum. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass unter vernünftigen Voraussetzungen die Folge $\{\mathcal{X}_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den A-invarianten Unterraum $\mathcal{V}_p := \operatorname{Ran} V_p$ mit $V_p := (v_1, \dots, v_p)$, aufgespannt von Eigenvektoren zu den p betragsgrößten Eigenwerten, konvergiert.

Zeige im Beweis des folgenden Satzes die Teilaussagen (a) – (e)!

Satz. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0.$$

Für die Startmatrix gelte $X_0^H X_0 = I$ sowie $\mathcal{X}_0 \cap \operatorname{span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\} = \{0\}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass mit $q := |\lambda_{p+1}/\lambda_p|$

$$d(\mathcal{X}_k, \mathcal{V}_p) \leq c \cdot q^k$$

für alle hinreichend großen k.

Beweis. Gezeigt wird auf direktem Weg die Abschätzung $\left\| P_{\mathcal{X}_k} - P_{\mathcal{V}_p} \right\|_2 \leq c q^k$.

a) Zunächst einmal gilt $\mathcal{X}_k = A^k \cdot \mathcal{X}_0$. (Beweis durch vollständige Induktion)

Es seien $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{C}^n$ die Spalten von X_0. Da die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bilden, besitzt jede Spalte eine Darstellung der Form

$$x_i = \sum_{j=1}^{p} c_{ij} v_j + t_i, \quad t_i = \sum_{i=p+1}^{n} d_{ij} v_j \in \operatorname{span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\}, \quad i = 1, \dots, p,$$

d. h., es ist $X_0 = V_p C^T + T_p$ mit $C = (c_{ij}) \in \mathbb{C}^{p\times p}$ und $T_p := (t_1, \dots, t_p)$.

b) Die Koeffizientenmatrix C ist regulär.

Wegen $\tilde{X}_0 := X_0 C^{-T} = V_p + \tilde{T}_p$ kann jede Spalte von X_0 o. B. d. A. in der Form

$$x_i = v_i + t_i, \quad t_i \in \operatorname{span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\},$$

dargestellt werden (d.h., im folgenden wird das C^T einfach weggelassen).

c) Durch $\{w_1^{(k)}, \dots, w_p^{(k)}\}$, $w_i^{(k)} := v_i + \lambda_i^{-k} A^k t_i$, ist eine Basis von $\mathcal{X}_k$ gegeben.

d) Damit gilt $\|w_i^{(k)} - v_i\|_2 \leq \hat{c} q^k$ mit einer von k unabhängigen Konstante $\hat{c}$.

e) Für die entsprechenden Matrizen $W_p^{(k)} := (w_1^{(k)}, \dots, w_p^{(k)})$ und V_p gilt dann

$$\|W_p^{(k)} - V_p\|_2 \leq \hat{c} q^k \sqrt{p}.$$

(*Hinweis*: Definition der Matrixnorm; Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Die Behauptung schließlich folgt aus

$$\|W_p^{(k)} \big((W_p^{(k)})^H W_p^{(k)} \big)^{-1} (W_p^{(k)})^H - V_p \big(V_p^H V_p \big)^{-1} V_p^H \|_2 \leq \bar{c}\, \|W_p^{(k)} - V_p\|_2$$

für hinreichend großes k. □

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (QR-Verfahren bei symmetrischen Tridiagonalmatrizen)

In dieser Aufgabe werden symmetrische Tridiagonalmatrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & & \gamma_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

untersucht.

a) Berechne zunächst für den Spezialfall $n = 2$ und $\gamma_1 = 1$ jeweils einen Schritt der Vektoriteration sowie der einfachen QR-Iteration mit dem Startvektor $(1, 0)^T$!

   Schließe auf das Konvergenzverhalten! Wieso ergibt sich kein Widerspruch zu den einschlägigen Sätzen der Vorlesung?

b) Zeige, dass für allgemeine $n \in \mathbb{N}$ mit jedem Eigenwert λ der Matrix A auch $-\lambda$ ein Eigenwert von A ist!

   Hinweis: Zeige, dass das charakteristische Polynom von A für gerade n eine gerade und für ungerade n eine ungerade Funktion ist!

c) Zeige unter Verwendung von Givens-Rotationen, dass die einfache QR-Iteration die Diagonale der Matrix A nicht verändert!

   Warum widerspricht auch diese Tatsache nicht der Vorlesung?

(4 Punkte)