Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11

Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 11.01.2011** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Orthogonale 2×2-Matrizen)

Zeige, dass sich bei einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ entweder um eine GIVENS-Rotation oder eine HOUSEHOLDER-Spiegelung handelt!
Gib überdies die Eigenwerte dieser Transformationsmatrizen an!

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (HESSENBERG-Matrizen)

Transformiere per Hand mittels HOUSEHOLDER-Transformationen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

auf eine ähnliche Matrix in HESSENBERG-Gestalt!

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (QR-Verfahren — Konvergenzbeschleunigung durch Shift)

Gegeben sei mit einem reellen Parameter ε die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Führe per Hand einen Schritt des QR-Verfahrens

a) ohne Shift bzw.

b) mit Einfachshift um $\mu = 1$

aus! Welche Konvergenzordnung ergibt sich im Fall (b)?

(4 Punkte)

Programmieraufgabe. (QR-Iteration zur Berechnung aller Eigenpaare)

Implementiere die QR-Iteration mit Shift zur Bestimmung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$! Geh dabei wie folgt vor:

a) Schreibe eine Funktion, die die Matrix A mittels HOUSEHOLDER-Reflexionen auf eine ähnliche Matrix $H = QAQ^T$ in oberer HESSENBERG-Form transformiert! Achte dabei darauf, dass dies in $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen geschieht!

b) Implementiere die QR-Zerlegung für eine Matrix H mittels GIVENS-Rotationen! Beachte dabei die bereits vorliegende Gestalt von H aus Teil (a)! Hierfür sind nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen nötig.

c) Erstelle eine Routine zur Berechnung der Eigenpaare, die mithilfe der Funktionen aus (a) und (b) die QR-Iteration mit Shift aus der Vorlesung für A realisiert! Die Zahl der Iterationen soll maximal $k_{\max} = 200$ betragen. Ein Rückgabeparameter soll aus einer Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von R_k bestehen, ein weiterer aus einer Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A sind, die aus der orthogonalen Matrix Q mit $A = QR_kQ^T$ erhalten werden können.

Teste den Algorithmus an folgender Matrix:

$$M := I - \frac{1}{10}A \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \qquad \text{wobei} \qquad A := \begin{pmatrix} -6 & 6 & & & \\ 1 & -4 & 1 & 2 & \\ & 1 & -5 & 2 & 2 \\ & 2 & 2 & -6 & 2 \\ & & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung zum Vergleich: Es gilt $MV = V\Lambda$ mit der Diagonalmatrix $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda)$ der Eigenwerte $\lambda = (0.96922, 0.74028, 0.15224, 0.46108, 0.27719)$. Die Eigenvektormatrix V ist nicht eindeutig. (alle Angaben ohne Gewähr)

(4 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe vom 10.01. – 14.01.2011 im CIP-Pool, Wegelerstraße 6

Öffnung des CIP-Pools in der ersten Woche des Jahres 2011:

In der Woche vom 3. – 7. Januar steht der CIP-Pool den Studenten am Montag und am Mittwoch jeweils von 13 bis 16 Uhr zu freien Verfügung. Ab einschließlich Freitag gelten die üblichen Öffnungszeiten.

Aufgabe 4. (Knobelaufgabe, ohne Wertung)

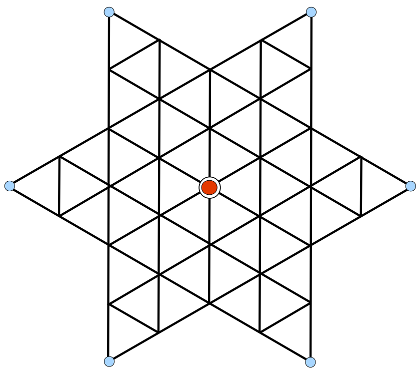
Diese Knobelaufgabe stammt aus dem mathematischen Adventskalender

`http://www.mathekalender.de`

des Jahres 2009. Auf der angegebenen Seite findet man neben dem aktuellen Kalender auch Lösungshefte für die vergangenen Jahre.

Weihnachten in Diffussetien

Im fernen Land Diffussetien wird, wenn Heiligabend der Weihnachtsmann kommt, traditionell ein Spiel zwischen Kindern und Erwachsenen gespielt, das durch seine strengen Regeln geradezu einem Ritual gleichkommt. Diffussetien ist ein ebenso geselliges wie kinderreiches Land: Jede Familie besteht aus dem Elternpaar und zehn Kindern. So hat es sich eingebürgert, dass angesichts beschränkter Platzverhältnisse immer drei Familien gemeinsam Weihnachten feiern.



An Heiligabend also stellen sich alle 36 Teilnehmer einer Weihnachtsfeier zusammen mit dem Weihnachtsmann in Form eines Sterns auf, sodass jeder höchstens sechs Nachbarn hat. Der Weihnachtsmann stellt sich in die Mitte und die Erwachsenen an die Spitzen, während die Kinder die übrigen Kreuzungspunkten besetzen. Der Weihnachtsmann bringt zu jeder Feier einen großen Sack Zuckerperlen mit, die während der Runden des im folgenden beschriebenen Spiels verteilt werden.

Zu Beginn jeder Spielrunde prüft jeder der 37 Spieler, wieviele Zuckerperlen er selbst hat. Dann gibt er genau ein Zehntel der zuvor festgestellten Anzahl an jeden seiner direkten Nachbarn ab, also auch an den Weihnachtsmann, wenn dieser ein Nachbar ist. Die Zuckerperlen sind so fein und so viele, dass wir uns nicht mit der Frage beschäftigen müssen, ob das überhaupt geht ohne Perlen zu zerteilen.

Die Eltern, stets um die Gesundheit ihrer Sprösslinge besorgt, lassen alle Süßigkeiten, die ihnen in die Hände fallen, sofort verschwinden und stehen daher zu Beginn jeder Runde ganz ohne Zuckerperlen da. Das Spiel endet, sobald die Kinder keine Lust mehr zum Weiterspielen haben. Während des Spiels ist der Verzehr von Zuckerperlen natürlich strengstens untersagt.

Wie hierzulande auch verbrüdern sich die Diffussetier Kinder nur zu gern gegen ihre Eltern, wenn es gilt Süßigkeiten zu erlangen. Dementsprechend teilen sie alle Perlen, die sie am Spielende noch haben, gleichmäßig unter sich auf. Daher sind sich auch alle Kinder einig, wann sie die Lust am Spiel verlieren — nämlich dann, wenn sie das erste Mal insgesamt weniger Süßigkeiten haben, als in der Vorrunde.

Frage: Wieviele Runden werden gespielt, bis die Kinder keine Lust mehr haben?

(0 Punkte)

Antwortmöglichkeiten:

a) Das Spiel kommt erst gar nicht in Gang.

b) 1 Runde

c) 2 Runden

d) 3 Runden

e) 5 Runden

f) 7 Runden

g) 11 Runden

h) 13 Runden

i) 17 Runden

j) Die Anzahl hängt ganz von der Anzahl der Zuckerperlen beim Weihnachtsmann zu Beginn des Spiels ab.

Starthilfe:

Offenbar stecken in der Spielsituation Symmetrien. So haben beispielsweise die Kinder direkt neben dem Weihnachtsmann stets die gleiche Menge Zuckerperlen. Mathematisch ausgedrückt gibt es auf dem Spielfeld nur fünf verschiedene Äquivalenzklassen von Spielern. Aufgrunddessen genügt es, fünf spezielle Spieler zu betrachten. Diese Vereinfachung reduziert die Anzahl der zu betrachtenden Unbekannten von 30 auf fünf.