Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag, 18.01.2011** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Ein Satz von FRANCIS)

Zeige die folgende Aussage, mit deren Hilfe sich die implizite Shift-Technik beim QR-Verfahren begründen lässt:

> **Satz.** Stimmen die unitären Matrizen Q und $\tilde{Q}$ in ihrer ersten Spalte überein und ist sowohl $Q^H A Q$ als auch $\tilde{Q}^H A \tilde{Q}$ von (irreduzibler) oberer HESSENBERG-Gestalt, dann stimmen beide Produkte bis auf eine diagonale Ähnlichkeitstransformation überein. Dabei gilt für die Transformationsmatrix D die Gleichung $|D| = I$.

Hinweise: Konkret zu zeigen ist das folgende: Es sei

$$H = (h_{ij}) := Q^H A Q, \qquad \tilde{H} = (\tilde{h}_{ij}) := \tilde{Q}^H A \tilde{Q}.$$

Zeige, dass $\tilde{H}D = DH$ für ein unitäres D gilt und dass diese Matrix D sogar diagonal sein muss; betrachte die Spalten 1 bis $n-1$ von $\tilde{H}D$!
Ist $Qe_1 = \tilde{Q}e_1$ und ist $h_{i,i-1} \neq 0$ für alle $1 < i \leq n$ (Irreduzibilität), dann gilt darüber hinaus auch $Qe_i = \theta_i \tilde{Q} e_i$ und $|h_{i,i-1}| = |\tilde{h}_{i,i-1}|$, wobei $|\theta_i| = 1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Doppel-Shift beim QR-Verfahren)

Es sei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle HESSENBERG-Matrix mit angeordneten Eigenwerten

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-2}| > |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$$

und $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

a) Erläutere, warum die in der Vorlesung in der Bemerkung nach Satz 3.42 vorgeschlagene Einfach-Shift-Strategie mit dem Shiftpolynom $f_k = x - a_{nn}^{(k)}$ in diesem Fall nicht sinnvoll ist!

b) Eine bessere Strategie ist die folgende: In jedem Schritt werden sukzessive zwei Einfach-Shifts um λ_n und λ_{n-1} durchgeführt. Wie lässt sich dies mit ausschließlich reeller Arithmetik (komplexe Operationen sind für reelle Matrizen zu aufwendig) bewerkstelligen?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Invarianzeigenschaften von KRYLOW-Räumen)

Zeige die folgenden Eigenschaften des Raums $\mathcal{K}_k(A, v)$!

a) $\mathcal{K}_k(\alpha A, \beta v) = \mathcal{K}_k(A, v)$ für alle $\alpha, \beta \neq 0$ (Skalierung)

b) $\mathcal{K}_k(A - \alpha I, v) = \mathcal{K}_k(A, v)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ (Translation)

c) $\mathcal{K}_k(TAT^{-1}, Tv) = T\mathcal{K}_k(A, v)$ für jedes reguläre $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (Basiswechsel)

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Arnoldi-Verfahren mit Householder-Transformationen)

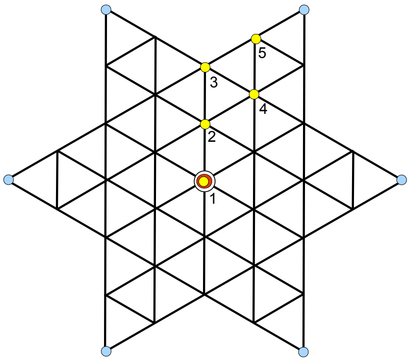
Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Der in der Vorlesung vorgestellte Arnoldi-Algorithmus zur Berechnung einer Orthogonalbasis der Krylow-Raums beruht auf dem modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren. Dieses Vorgehen ist numerisch weniger stabil als die Orthogonalisierung mithilfe von Householder-Transformationen.

Gib in Pseudocode eine Version des Arnoldi-Verfahrens an, die Householder-Transformationen verwendet! Vergleiche den Rechenaufwand der beiden Varianten!

(4 Punkte)

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 11:

Durch die in der Starthilfe erläuterten Reduzierung der Unbekannten genügt es, sich auf die Betrachtung der Spieler an den Positionen 1 bis 5 in der folgenden Abbildung zu beschränken:



In Runde i ändert sich die Zuckerperlenmenge a_k^i von Spieler k gemäß der Vorschriften

$$
\begin{aligned}
a_1^{i+1} &= a_1^i - \frac{6}{10}a_1^i + \frac{6}{10}a_2^i \\
a_2^{i+1} &= a_2^i - \frac{4}{10}a_2^i + \frac{1}{10}a_1^i + \frac{1}{10}a_3^i + \frac{2}{10}a_4^i \\
a_3^{i+1} &= a_3^i - \frac{5}{10}a_3^i + \frac{1}{10}a_2^i + \frac{2}{10}a_4^i + \frac{2}{10}a_5^i \\
a_4^{i+1} &= a_4^i - \frac{6}{10}a_4^i + \frac{2}{10}a_2^i + \frac{2}{10}a_3^i + \frac{2}{10}a_5^i \\
a_5^{i+1} &= a_5^i - \frac{2}{10}a_5^i + \frac{1}{10}a_3^i + \frac{1}{10}a_4^i
\end{aligned}
$$

Mit der Matrix M aus der Programmieraufgabe von Blatt 11 gilt damit

$$a^{i+1} = Ma^i,$$

wobei der Vektor λ der Eigenwerte und eine Eigenvektormatrix V zu berechnen sind. Wählt man für a^i die Darstellung $a^i = Vb^i$ mit einen passenden Koeffizientenvektor b^i, so gilt mit $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda)$ offenbar $Vb^{i+1} = a^{i+1} = Ma^i = MVb^i = V\Lambda b^i$. Rekursiv ergibt sich damit

$$a^i = V\Lambda^i b^0 = V\Lambda^i V^{-1}a^0.$$

Zu Beginn des Spiels ist $a_1^0 = 1$ und $a_k^0 = 0$ für $k > 1$. Die nach Runde i im Besitz der Kinder befindliche Zuckerperlenmenge ist $z^i = (0, 6, 6, 6, 12)a^i$ (Anzahl der Kinder in den einzelnen Positionen). Definiert man

$$\ell := (0, 6, 6, 6, 12)V \qquad \text{und} \qquad r := V^{-1}a^0,$$

folgt

$$z^i = \ell\Lambda^i r = \sum_{k=1}^{5} \ell_k r_k \lambda_k^i,$$

woraus sich errechnen lässt, dass die Kinder nach sechs Spielrunden mit gut 90 % den maximalen Zuckerperlenanteil ihr eigen nennen und folglich nach der siebten Runde aufhören werden:

$$(z^1, \ldots, z^7) = (0.6, 0.78, 0.852, 0.8850, 0.89850, 0.900096, 0.8937522).$$