Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 13.

Abgabe am **Dienstag, 25.01.2011** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Invarianzeigenschaften des LANCZOS-Verfahrens)

Zeige die folgenden Eigenschaften des Verfahrens!

a) Das LANCZOS-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix $A - \sigma I$ für beliebiges $\sigma \in \mathbb{C}$ bei gleichem Startvektor x_0 stets dieselbe Matrix W_k.

b) Das LANCZOS-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix A mit Startvektor x_0 dieselbe Tridiagonalmatrix T_k wie für die Matrix $Q^H A Q$ mit Startvektor $Q^H x_0$, solange Q unitär ist.

Was folgt aus (b) für die theoretische Analyse des Verfahrens?

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Startvektor beim LANCZOS-Verfahren)

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einem einfachen Eigenwert λ_1 und zugehörigem Eigenvektor v_1.
Zeige, dass die tridiagonale Matrix $T_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ aus der LANCZOS-Zerlegung nach Abbruch mit $\beta_{k+1} = 0$ keinen Eigenwert gleich λ_1 hat, wenn der Startvektor x_0 senkrecht auf v_1 steht!
Hinweis: Verwende Aufgabe 1b und beachte, dass A unitär diagonalisierbar ist!

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Eigenpaare spezieller Tridiagonalmatrizen)

Zeige, dass die Tridiagonalmatrix

$$T := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & & \\ \beta & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \beta\gamma > 0,$$

für $k = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\operatorname{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

und zugehörige Eigenvektoren v_k mit

$$(v_k)_\ell = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\ell-1}{2}} \sin\left(\frac{k\ell\pi}{n+1}\right)$$

für $\ell = 1, \ldots, n$ besitzt!

(4 Punkte)

Programmieraufgabe. (Eigenpaarberechnung bei dünn besetzten Matrizen)

In dieser Aufgabe kommen zur Berechnung eines dominanten Eigenpaars einer dünn besetzten Matrix die Vektoriteration nach von Mises sowie das Lanczos-Verfahren zum Einsatz.

a) Implementiere die in der Vorlesung vorgestellte Matrix-Vektor-Multiplikation für im CRS-Format gespeicherte Matrizen!

b) Implementiere damit die Vektoriteration zur Suche des Eigenpaars zum größten Eigenwert nach von Mises für solche dünn besetzten Matrizen!

c) Implementiere unter Verwendung von Aufgabenteil (a) das Lanczos-Verfahren für dünn besetzte hermitesche Matrizen!

Betrachte nun die Blocktridiagonalmatrix

$$L := \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ & & -I & T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} \quad \text{mit} \quad T := \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Berechne mithilfe der Vektoriteration (b) den größten Eigenwert der Matrix L für $n = 50$ sowie einen zugehörigen Eigenvektor!
Wende nun das Lanczos-Verfahren (c) auf dieses Problem an!
Vergleiche die Konvergenzgeschwindigkeiten!

Lösung zum Vergleich: Für den größten Eigenwert gilt $\lambda_1 \approx 7.992413$.
(alle Angaben ohne Gewähr)

(4 Punkte)

Abgabe der Programmieraufgabe vom 24.01. – 28.01.2011 im CIP-Pool, Wegelerstraße 6

Bemerkung zur Herkunft der Systemmatrix L:
Bei der Modellierung vieler Probleme tritt der sogenannte Laplace-Operator Δ mit

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

in Erscheinung. Eine physikalisch motivierte Anwendung ist beispielsweise die Analyse der Bewegung einer schwingenden Saite oder Membran. Um derlei Probleme numerisch behandeln zu können, wird das betrachtete Gebiet mit der Schrittweite h diskretisiert; man ersetzt dann den Laplace-Operator durch einen speziellen Differenzenquotienten,

$$-\Delta u(x,y) \approx \frac{1}{h^2}\big(4u(x,y) - u(x+h,y) - u(x-h,y) - u(x,y+h) - u(x,y-h)\big).$$

Werden die Punkte des diskretisierten Gebiets lexikografisch angeordnet, ergibt sich aus diesen sogenannten *finiten Differenzen* die geblockte Matrix $1/h^2 L$, die dann auf Eigenwerte, d.h. die Eigenschwingungen des Objekts hin untersucht werden kann.
Ähnlich wie in Aufgabe 3 zeigt man analytisch, dass L für $k, \ell = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte

$$\lambda_{k\ell} = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) + 4\sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2(n+1)}\right)$$

und zugehörige Eigenvektoren $v_{k\ell}$ mit den Komponenten

$$(v_{k\ell})_{n(i-1)+j} = \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{j\ell\pi}{n+1}\right)$$

für $i, j = 1, \ldots, n$ besitzt.