Übungsblatt 14.

Abgabe am **Dienstag, 01.02.2011** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1. (Symmetrische Tridiagonalmatrizen)

Gegeben sei eine symmetrische, tridiagonale Matrix A mit einem Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$, der die algebraische Vielfachheit k besitzt.
Zeige, dass in diesem Fall mindestens $k-1$ Subdiagonaleinträge von A null sein müssen!

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Parameterwahl im JACOBI-Verfahren)

Zeige das folgende Lemma aus der Vorlesung!

Lemma 3.60. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt

$$\left\|A - J_{k\ell}^H A J_{k\ell}\right\|_F^2 = \frac{2}{c^2} a_{k\ell}^2 + 4(1-c) \sum_{i\notin\{k,\ell\}} \left(a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2\right).$$

Dabei bezeichne $J_{k\ell} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die in die Identität eingebettete JACOBI-Rotationsmatrix und c den entsprechenden Diagonaleintrag.
Bemerkung: Der Diagonaleintrag $c = (1+t^2)^{-1/2}$ hängt vom Parameter t ab, für dessen Wahl es nach (3.20) zwei Möglichkeiten gibt. Mit der im Lemma bewiesenen Identität können effizient beide Möglichkeiten getestet und diejenige gewählt werden, für die sich eine kleinere Norm ergibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Eindimensionale lineare Optimierung)

Eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll auf der Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : ax \geq b\}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0,$$

minimiert werden.
Zeige: Ist x_* lokales Minimum von f in M, so existiert ein reelle Zahl $s_* \geq 0$, sodass $f'(x_*) = as_*$ und $s_*(ax_* - b) = 0$.
Warum gilt die Aussage nur in dieser Richtung? (Gegenbeispiel)

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (KKT-Bedingungen für nichtlineare Probleme — ein Beispiel)

Es seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \quad \text{und} \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - 2 \\ x_1 + x_2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Löse das nichtlineare Optimierungsproblem

$$f(x_1, x_2) \stackrel{!}{=} \min \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x_1, x_2) \leq 0\}$$

unter Verwendung der Bedingungen von KARUSH, KUHN und TUCKER!

(4 Punkte)

Ausgabe des letzten Übungsblattes:
Das (freiwillige) Übungsblatt 15 wird bereits am Freitag, den 28. Januar erscheinen. Es enthält unter anderem eine (ebenfalls freiwillige) Programmieraufgabe, die in der letzten Woche, also vom 31.01. bis 04.02 im CIP-Pool zu den üblichen Zeiten bearbeitet werden kann. Während der vorlesungsfreien Zeit werden die Öffnungszeiten eingeschränkt.