Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2010/11
Prof. Dr. Mario Bebendorf
J. Gesenhues, A. Kühnemund

universitätbonn

Übungsblatt 15

(freiwillige Abgabe; Lösungsvorschläge auf Anfrage)

Aufgabe 1. (Zusammenfassen des Stoffs)

Schreibe ohne Verwendung irgendwelcher Formeln eine je einseitige Zusammenfassung folgender in der Vorlesung behandelter Schwerpunkte:

a) Lineare Ausgleichsprobleme (Kapitel 1)

b) Nichtlineare Nullstellenbestimmung (Kapitel 2.1 – 2.3)

c) Verfahren zur nichtlinearen Minimierung (Kapitel 2.4 – 2.7)

d) Eigenwertprobleme (Kapitel 3)

Aufgabe 2. (Abstiegsverfahren — verallgemeinertes Gradientenverfahren*)

Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{C}^n$ und $f(x) := \frac{1}{2}x^H Ax - b^H x$.
Zeige, dass für $\alpha \in (0, 2/\lambda)$ das Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \alpha B\nabla f(x_k)$$

gegen $A^{-1}b$ konvergiert! Dabei bezeichne λ den größten Eigenwert von $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$.
Hinweise: Nutze die Energienorm $\|x\|_A^2 := x^H Ax$ (AlMa II) für positiv definites A zur Abschätzung des Fehlers! Zeige dafür, dass für die zugeordnete Matrixnorm die Gleichung $\|M\|_A = \|A^{\frac{1}{2}}MA^{-\frac{1}{2}}\|_2$ für jedes $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt! Beachte ferner Satz 6.18 aus AlMa I!

Aufgabe 3. (Eigenwerte von Sattelpunktproblemen*)

Zu gegebenen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit $\operatorname{rank} B = m$ sei

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^H & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}.$$

a) Zeige: Ist A positiv definit, so ist M invertierbar.

b) Im Spezialfall $m = n$ reicht es, A als hermitesch vorauszusetzen: Zeige mithilfe des Satzes von Courant-Fischer, dass die Matrix M dann genau n positive und n negative Eigenwerte hat!

c) Drücke für $m = n$ in den Spezialfällen $A = 0$ und $A = I$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von M durch Singulärwerte und Singulärvektoren von B aus!

Bemerkung: Die Matrix M entsteht beispielsweise als Systemmatrix aus Optimierungsaufgaben vom Typ $f(x) = \min!$ unter der Nebenbedingung $B^H x = c$, wobei f wie in Aufgabe 2 definiert ist. Die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems mit $(b^T, c^T)^T$ als rechter Seite ist Sattelpunkt der Lagrange-Funktion $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^H(B^H x - c)$.

Aufgabe 4. (Matrizentheorie)

Wie steht es um den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen? Gib für jede entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

a) Das Produkt quadratischer Matrizen ist quadratisch.

b) Das Produkt invertierbarer Matrizen ist invertierbar.

c) Das Produkt diagonalisierbarer Matrizen ist diagonalisierbar.

d) Das Produkt normaler Matrizen ist normal.

e) Das Produkt reell diagonalisierbarer Matrizen ist reell diagonalisierbar.

f) Das Produkt hermitescher Matrizen ist hermitesch.

g) Das Produkt unitärer Matrizen ist unitär.

h) Das Produkt positiv (semi)definiter Matrizen ist positiv (semi)definit.

Für die vorlesungsfreie Zeit:
Wie lassen sich die falschen Aussagen retten? Was ist mit Summe und Inverse?

Aufgabenzusatz:
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (!) eine quadratische Matrix mit den Eigenwerten $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$. Ferner seien im folgenden: U eine unitäre Matrix (d.h., $U^H = U^{-1}$), T eine invertierbare Matrix und R eine obere Dreiecksmatrix, jede aus $\mathbb{C}^{n\times n}$. Desweiteren sei I die Einheitsmatrix und $\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Matrix der Eigenwerte von A.
Aus der linearen Algebra bekannt ist:

a) A quadratisch $\iff$ $A = URU^H$ (Schur-Zerlegung)

b) A invertierbar $\iff$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$

c) A diagonalisierbar $\iff$ $A = T\Lambda T^{-1}$ (Ähnlichkeit zur Matrix Λ)

Vorlesungsbegleitend wurden neben den bekannten Definitionen auch die im folgenden aufgeführten Charakterisierungen spezieller Matrizen gezeigt:

d) A unitär diagonalisierbar $\iff$ $A = U\Lambda U^H$ [R aus (a) diagonal bzw. T aus (c) unitär]
$\iff$ $AA^H = A^HA$ $\iff:$ A normal
$\iff$ $\|A^Hx\|_2 = \|Ax\|_2$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$
$\iff$ $\|A\|_F^2 = \sum |\lambda_i|^2$

e) A reell diagonalisierbar $\iff$ $A = T\Lambda T^{-1}$ und $\Lambda = \Lambda^H$

f) A unitär reell diagonalisierbar $\iff$ $A = U\Lambda U^H$ und $\Lambda = \Lambda^H$
$\iff$ $A^H = A$ $\iff:$ A hermitesch
$\iff$ $x^HAx \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$

g) A unitär $\iff$ $A = U\Lambda U^H$ und $|\Lambda| = I$ $\iff$ $A^H = A^{-1}$

h) A positiv (semi)definit $\iff$ $A = U\Lambda U^H$ und $\Lambda > 0$ (bzw. $\Lambda \geq 0$)
$\iff$ $x^HAx > 0$ (bzw. $x^HAx \geq 0$) für alle $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$

► Jede weitere Charakterisierung (äquivalente Bedingung) für diese Arten von Matrizen mit entsprechendem Beweis bzw. Literaturangabe gibt mindestens zwei Bonuspunkte.[2]

[2] Zum Beispiel gilt: A ist normal gdw. jeder rechte EV von A gleichzeitig linker EV ist gdw. $AA^H - A^HA$ positiv semidefinit ist; A ist positiv definit (!) gdw. $A^H = A$ und $\det(A_k) > 0$ gilt gdw. $A = LL^H$ mit einer unteren Dreiecksmatrix L, die nur positive Diagonalelemente besitzt (Cholesky-Zerlegung).

Aufgabe 5. (Lemma von Farkas)

Es sei folgender Satz von Tucker ohne Beweis gegeben:

> **Satz.** Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hat das System $x + A^T y > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, stets eine Lösung (x^*, y^*), für die $Ax^* = 0$, $x^* \geq 0$ und $A^T y^* \geq 0$ gelten.

Beweise mithilfe dieses Satzes das Lemma von Farkas in der folgenden Form:

> **Lemma.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Das System $Ax = b$, $x \geq 0$ besitzt eine Lösung genau dann, wenn für alle $y \in \mathbb{R}^n$, für die $A^T y \geq 0$ gilt, die Ungleichung $b^T y \geq 0$ erfüllt ist.

Bemerkung: Um zu sehen, dass die hier gegebene Formulierung des Lemmas von Farkas äquivalent zur in der Vorlesung bewiesenen Version ist, gehe wie folgt vor:
Vertausche in der Vorlesung m und n und fasse die x_i aus der Vorlesung als Spalten der Matrix A auf. Die α_i aus der Definition von cone sind hier Komponenten des Vektors $x \geq 0$. Der Vektor p aus der Vorlesung heißt hier y.

Programmieraufgabe. (Jacobi-Verfahren zur Eigenwertbestimmung)

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Implementiere das klassische sowie das zyklische Jacobi-Verfahren (Algorithmen in den Übungsgruppen) zur Berechnung der Eigenwerte von A!

b) Vergleiche die beiden Implementierungen hinsichtlich Konvergenz- und Ausführungsgeschwindigkeit für zufällig erzeugte Matrizen! Ziehe dazu als Vergleichsgröße den Verlauf von $\mathrm{off}(A^{(\ell)}) = \sum_{i\neq j} a_{ij}^2$ während der Iteration heran!

Fragen: Wie kann $\mathrm{off}(A^{(\ell)})$ in jedem Schritt effizient berechnet werden?
Was passiert bei der Anwendung des Algorithmus auf eine der (nicht-symmetrischen) Beispielmatrizen von Blatt 9 oder 11?

Freiwillige Bearbeitung der Programmieraufgabe vom 31.01. – 04.02.2011 im CIP-Pool

Öffnung des CIP-Pools während der vorlesungsfreien Zeit:
Auch während der vorlesungsfreien Zeit steht der CIP-Pool für die Studenten zur freien Verfügung. Geöffnet ist dann i. d. R. dienstags und donnerstags zwischen 13 und 16 Uhr.