Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag**, **29.10.**

Aufgabe 1. (Normalengleichungen — ein physikalisches Ausgleichsproblem)

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls E und der POISSON-Querkontraktionszahl ν eines elastischen Materials wird eine quaderförmige Probe in achsenparalleler Lage mit den Normalspannungen σ_x, σ_y und σ_z belastet. Gemessen werden die resultierenden Dehnungen ϵ_x, ϵ_y und ϵ_z. Die Ergebnisse zweier Messungen lauten

1. Versuch:

	x	y	z
σ	1000	0	1000
ϵ	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$-3.02 \cdot 10^{-3}$	$3.08 \cdot 10^{-3}$

2. Versuch:

	x	y	z
σ	0	1000	0
ϵ	$-1.60 \cdot 10^{-3}$	$4.69 \cdot 10^{-4}$	$-1.54 \cdot 10^{-3}$

Angegeben ist hierbei die Spannung in $\mathrm{N/mm^2}$. Berechne die Größen E und ν so, dass das HOOKEsche Gesetz,

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{1}{E}\big(\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)\big),\\
\epsilon_y &= \frac{1}{E}\big(\sigma_y - \nu(\sigma_x - \sigma_z)\big),\\
\epsilon_z &= \frac{1}{E}\big(\sigma_z - \nu(\sigma_x - \sigma_y)\big),
\end{aligned}$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadratsumme bestmöglich erfüllt ist!

Aufgabe 2. (Fehlende Eindeutigkeit bei Gleichungssystemen)

Es seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rank}(A) = n-1$, $b \in \operatorname{Ran}(A)$ und $0 \neq w \in \operatorname{Ker}(A)$ gegeben. Zeige:

a) Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A & v \\ w^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn v nicht im Bild von A ist. Der Lösungsvektor x erfüllt auch die ursprüngliche Gleichung $Ax = b$.

Ist A zusätzlich hermitesch, d.h. $A^H = A$, so garantiert die Wahl $v := w$ die Eindeutigkeit.

b) Das regularisierte Gleichungssystem

$$(A + vw^H)x = b$$

ist eindeutig lösbar, falls $v \neq 0$ im Kern von A^H ist. Der Lösungsvektor x erfüllt auch die ursprüngliche Gleichung $Ax = b$.

Ist A zusätzlich positiv semidefinit, d.h. $x^H Ax \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{C}^n$, so ist $A+ww^H$ positiv definit.

Aufgabe 3. (Cholesky-Zerlegung)

In der Vorlesung Algorithmische Mathematik 1 wurde die auf der Gauß-Elimination beruhende LR-Zerlegung behandelt. Für jede reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist die teilpivotisierte LR-Zerlegung durchführbar und eindeutig. Wie sich anhand des Algorithmus leicht nachvollziehen lässt, benötigt sie

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} 2(n-k+1) = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Operationen.

In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass für positiv definites A eine Zerlegung der Art $A = LL^H$ existiert, die sich mit weniger Operationen berechnen lässt. Dabei ist L eine untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Eine Zerlegung dieser Art heißt *Cholesky-Zerlegung.*

a) Es sei $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesch mit $A_{11} \in \mathbb{K}^{p\times p}$, $A_{22} \in \mathbb{K}^{(n-p)\times(n-p)}$.

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) A ist positiv definit.

(ii) A_{11} ist positiv definit. $S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ ist wohldefiniert und positiv definit.

Bemerkung: S ist das sogenannte *Schur-Komplement.* Existiert es, so lässt sich eine Block-LR-Zerlegung von A bilden als

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

b) Zeige, dass die Cholesky-Zerlegung von A genau dann existiert, wenn A positiv definit ist.

c) Eintragsweise dargestellt lautet die Cholesky-Zerlegung

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{j} L_{ik}\bar{L}_{jk} = L_{ij}L_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}\bar{L}_{jk} \quad i \geq j.$$

Daraus ergibt sich die Berechnungsformel (für $j = 1, \ldots, n$)

$$L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |L_{jk}|^2},$$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}}\Big(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}\bar{L}_{jk}\Big), \quad i = j+1, \ldots, n.$$

Gib einen Algorithmus in Pseudocode an, der für gegebenes positiv definites A die untere Dreiecksmatrix L mit $A = LL^H$ berechnet. Wieviele Operationen benötigt dieser Algorithmus? Weshalb ist eine Pivotisierung im Gegensatz zur LR-Zerlegung nicht nötig?

Abgabe der Programmieraufgabe am 04. oder 05. November im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (Cholesky-Zerlegung)

Schreibe ein C/C++-Programm zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung für reelle positiv definite Matrizen und teste anhand $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ mit

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6} j(j+1)(3i-j+1), & j \le i, \\ \frac{1}{6} i(i+1)(3j-i+1), & j > i. \end{cases}$$

Die Kriterien für die Zulassung zur Klausur lauten wie folgt:

- Für jede Aufgabe werden vier Punkte veranschlagt. Pro Blatt gibt es entweder vier Theorieaufgaben oder eine Programmieraufgabe und drei Theorieaufgaben. Programmieraufgaben gibt es voraussichtlich auf jedem zweiten Übungsblatt.
- Programmieraufgaben und sonstige Aufgaben werden getrennt gewertet. Übers ganze Semester müssen jeweils 50% der zu erreichenden Punkte gesammelt werden.
- Die Abgabe der Programme erfolgt im CIP-Pool (`http://cip.iam.uni-bonn.de`). Der gewünschte Abgabetermin soll in der Woche vor der Abgabe in die im CIP-Pool ausgehängten Listen eingetragen werden. Die CIP-Pool-Betreuer stehen für Fragen rund um die Programmieraufgaben zur Verfügung.
- Die Abgabe der Theorieaufgaben in Zweiergruppen und die Abgabe der Programmieraufgaben in Dreiergruppen ist erwünscht. Es wird jedoch jeder und jedem Einzelnen dringend geraten, sich mit allen Aufgaben auseinanderzusetzen, da die Klausur natürlich nicht in Gruppenarbeit bearbeitet werden kann.