Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Dienstag**, **12.11.**

Aufgabe 1. (Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse)

a) Berechne per Hand die Singulärwertzerlegung der folgenden Matrizen und bestimme aus dieser anschließend die jeweilige Pseudoinverse.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Zeige anhand der Matrix C, dass die Gleichung $(M_1 M_2)^+ = M_2^+ M_1^+$ für die Pseudoinverse im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2. (Eindeutigkeit der Singulärdarstellung)

Zeige im Beweis des folgenden Satzes (er entspricht der Bemerkung vor Satz 1.24 aus der Vorlesung) die Teilaussagen (a) – (e)!

Satz. Die Singulärwerte σ_i einer Matrix sind eindeutig bestimmt. Die zu σ_i gehörenden Singulärvektoren u_i (links) und v_i (rechts) sind genau dann bis auf einen skalaren Faktor vom Betrag eins eindeutig, wenn $\sigma_j \neq \sigma_i$ für alle j.

Beweis. Angenommen, es gibt neben v_1 einen weiteren, von v_1 linear unabhängigen Vektor $\tilde{v}$ mit $\|\tilde{v}\|_2 = 1$ und $\|A\tilde{v}\|_2 = \sigma_1$, dann wird gezeigt, dass σ_1 mehr als einmal unter den Singulärwerten auftauchen muss. Der Rest ergibt sich per Induktion. Doch der Reihe nach.

a) Der Singulärwert σ_1 ist in jedem Falle eindeutig bestimmt.

Mit $\tilde{v}$ wie oben betrachte nun

$$\tilde{v}_1 := \frac{\tilde{v} - (v_1^H \tilde{v}) v_1}{\left\|\tilde{v} - (v_1^H \tilde{v}) v_1\right\|_2}.$$

Dieser Vektor ist per Definition normiert und steht senkrecht auf v_1.

b) Umgekehrt ist $\tilde{v} = c v_1 + s \tilde{v}_1$ mit Konstanten c und s, für die $|c|^2 + |s|^2 = 1$.

c) Es gilt $\|A\tilde{v}_1\|_2 = \sigma_1$.

Damit ist $\tilde{v}_1$ ein zweiter rechter Singulärvektor bezüglich σ_1.

d) Das bedeutet aber $\sigma_1 = \sigma_2$.

e) Damit gilt die Aussage des Satzes für σ_1, v_1 und u_1.

Der Rest der Zerlegung ist bestimmt durch die Wirkung der Matrix A auf den zu v_1 orthogonalen Raum. Da v_1 bis auf Multiplikation mit einem Skalar vom Betrag eins festgelegt ist, ist dieser Orthogonalraum eindeutig bestimmt und die Eindeutigkeit der verbleibenden Singulärwerte und -vektoren folgt nun per Induktion. □

Aufgabe 3. (Invarianzeigenschaften von Krylov-Räumen)

Zeige die folgenden Eigenschaften des Raums $\mathcal{K}_k(A, v)$.

a) $\mathcal{K}_k(\alpha A, \beta v) = \mathcal{K}_k(A, v)$ für alle $\alpha, \beta \neq 0$ (Skalierung)

b) $\mathcal{K}_k(A - \alpha I, v) = \mathcal{K}_k(A, v)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ (Translation)

c) $\mathcal{K}_k(TAT^{-1}, Tv) = T\mathcal{K}_k(A, v)$ für jedes reguläre $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (Basiswechsel)

Abgabe der Programmieraufgabe am 18. oder 19. November im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (Orthogonalisierungsverfahren)

Zur Orthogonalisierung (bzw. Orthonormalisierung) einer gegebenen Menge von Vektoren sollen die folgenden Verfahren miteinander verglichen werden:

a) das klassische Verfahren von Gram-Schmidt,

b) das modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren bzw.

c) die QR-Zerlegung nach Householder.

Dabei ergibt sich die Methode zur Orthonormalisierung von n gegebenen Vektoren der Länge m in (c) sofort aus Aufgabe 2 vom letzten Blatt.
Schreibe ein Programm, das die drei genannten Verfahren umsetzt! Die Ausgabe soll aus den orthonormierten Vektoren und ihren wechselseitigen Skalarprodukten bestehen.
Teste die Routinen mit folgenden Beispielen:

(i) $x_1 = (11, 2, 3, 4)^T$, $x_2 = (2, 3, 44, 5)^T$, $x_3 = (3, 44, 5, 6)^T$, $x_4 = (4, 5, 6, 77)^T$

(ii) $x_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $x_2 = (2, 3, 4, 5)^T$, $x_3 = (3, 4, 5, 6)^T$, $x_4 = (4, 5, 6, 7)^T$

(iii) $x_1 = (1, 10^{-10}, 0, 0)^T$, $x_2 = (1, 0, 10^{-10}, 0)^T$, $x_3 = (1, 0, 0, 10^{-10})^T$, $x_4 = (1, 0, 1, 1)^T$

Vergleiche die drei Methoden hinsichtlich Güte und Aufwand!
