Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag**, **03.12.**

Aufgabe 1. (Methode des steilsten Abstiegs)

a) Zeige für die Methode des kleinsten Abstiegs, dass für

$$\mathbb{N} \ni k \geq \frac{1}{2} \operatorname{cond}(A) \log\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)$$

gilt:

$$\|x_k - x\|_A \leq \varepsilon \, \|x_0 - x\|_A \, .$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Funktion

$$f(x) = \log\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big) - \frac{2}{x}$$

für $x \in (1, \infty)$ nichtnegativ ist.

b) Von welcher Ordnung ist die Gesamtkomplexität der Methode des steilsten Abstiegs?

Aufgabe 2. (CG-Verfahren von Hand)

Bestimme die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

mit Hilfe des Verfahrens der konjugierten Gradienten mit dem Startvektor $(0, 0)^T$ von Hand.

Aufgabe 3. (CG-Verfahren bei semidefinitem A)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv-semidefinit, $b \in \operatorname{Ran}(A)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass alle im Laufe des CG-Verfahrens konstruierten Suchrichtungen $p_0, \ldots, p_m$ ebenfalls im Bild von A liegen. Folgere daraus, dass für $Ap_j \neq 0$, $j = 0, \ldots, m-1$, die Ungleichung $(Ap_j, p_j) > 0$ gilt, dass also das CG-Verfahren auch im positiv-semidefiniten Fall durchführbar ist.

Aufgabe 4. (Spektraläquivalenz)

Zwei Folgen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ positiv definiter Matrizen $A_n, B_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, heißen spektraläquivalent, falls für jedes n Konstanten $\gamma_n, \Gamma_n > 0$ mit $\Gamma_n/\gamma_n < c$ existieren, sodass

$$\gamma_n(x, B_n x) \leq (x, A_n x) \leq \Gamma_n(x, B_n x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^n$$

gilt. Dabei darf c nicht von n abhängen.

Zeige, dass $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann spektraläquivalent sind, wenn eine Konstante $\tilde{c}$ existiert, sodass

$$\frac{\lambda_{\max}\left(A_n B_n^{-1}\right)}{\lambda_{\min}\left(A_n B_n^{-1}\right)} \leq \tilde{c} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$