Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

10. Aufgabenblatt vom 16.6.2008

Aufgabe 36 (10 Punkte)

Zu $m \in \mathbb{N}$ seien Funktionen $g_k : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, 2m+1$ gegeben durch

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

und

$$g_{2j}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(jx), \quad g_{2j+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(jx), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktionen ein *Orthonormalsystem* in $L_2([0,2\pi])$ bilden, das heißt, dass

$$\langle g_k \,, g_l \rangle := \int_0^{2\pi} g_k(x) g_l(x) dx = \delta_{kl},$$

$k,l \in \{1, \ldots, 2m+1\}$.

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei f_n ein reelles trigonometrisches Polynom vom Grad $2n+1$, also $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Zeigen Sie, dass das trigonometrische Polynom von Grad $2m+1 < 2n+1$ mit minimalem *Abstand* von f_n (im Sinne von $L_2([0,2\pi])$) gegeben ist durch Abschneiden der obigen Summation bei $k = m$. Das heißt, zeigen Sie, dass $\|f_n - p_m\|^2 := \langle f_n - p_m \,, f_n - p_m \rangle$ unter allen

$$p_m(x) = \widetilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{m} \Big(\widetilde{a}_k \cos(kx) + \widetilde{b}_k \sin(kx) \Big)$$

mit $\widetilde{a}_0, \ldots, \widetilde{a}_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_m \in \mathbb{R}$ minimiert wird durch die Wahl $\widetilde{a}_0 = a_0$, $\widetilde{a}_k = a_k$, $\widetilde{b}_k = b_k$, $k = 1, \ldots, m$.
Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 36.

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Man berechne das interpolierende trigonometrische Polynom

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \beta_2 e^{2ix} + \beta_3 e^{3ix}$$

zu den Stützstellen

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	1	3	5	1	1

.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

Für $n = 2m$ und $0 \le k < n$ sei

$$\ell_k(x) = \frac{\sin(m(x - x_k))}{n} \cot\Big(\frac{x - x_k}{2}\Big),$$

wobei wir, wie üblich, $x_k = 2k\pi/n$ setzen. Zeigen Sie: ℓ_k ist ein trigonometrisches Polynom und es gilt

$$\ell_k(x_j) = \delta_{jk}, \quad j,k = 0, \ldots, n-1.$$

(Diese trigonometrischen Polynome haben also die analogen Eigenschaften der Lagrange'schen Polynome für das polynomiale Interpolationsproblem.)

Abgabe: 23.6.2008, in der Vorlesungspause