Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

12. Aufgabenblatt vom 30.6.2008

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Man berechne die Koeffizienten des kubischen Splines $s : [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$s(x) = \sum_{j=-1}^{3} \alpha_j B_3(x-j),$$

zu den Stützpunkten

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	2	3	4

mit Hermite-Randbedingungen $s'(0) = s'(2) = 1$.

Aufgabe 45 (10 Punkte)

Man betrachte die folgende Interpolationsaufgabe für n-periodische quadratische Splines. Für festes $n \geq 3$ seien die Daten y_k, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben, welche als n-periodisch angenommen werden, d. h. $y_{k+n} = y_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ausgehend von dem n-periodischen quadratischen B-Spline B_2 seien Splines $B_{2,\nu}$ definiert durch $B_{2,\nu}(x) = B_2(x+1/2-\nu)$. Insbesondere gilt daher $B_{2,\nu+n} = B_{2,\nu}$. Betrachten Sie die folgenden Interpolationsprobleme (für die eben eingeführten periodischen Splines):
(a) Stützstellen $(k, y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ (Interpolation in den Gitterpunkten),
(b) Stützstellen $(k + 1/2, y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ (Interpolation in den Mittelpunkten).
Bestimmen Sie die jeweiligen Gleichungssysteme für die Koeffizienten

$$s(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu B_{2,\nu}(x).$$

Zeigen Sie, dass das System (a) für geradzahliges n singulär ist!

Aufgabe 46 (10 Punkte)

a) Die *offene Newton-Cotes-Formel* vom Grad 2 auf $[a,b]$ ist definiert durch

$$I[f] = h\Big(\frac{8}{3}f(x_0) - \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{8}{3}f(x_2)\Big),$$

wobei $h = \frac{b-a}{4}$ und $x_i = a + (i+1)h$, $i = 0,1,2$. (Beachten Sie, dass die Funktion f nicht an den Randpunkten von $[a,b]$ ausgewertet wird!) Zeigen Sie, dass $I[f]$ den Exaktheitsgrad 3 besitzt.
b) Die *korrigierte Trapezregel* ist für $f \in C^1([a,b])$ definiert durch

$$I[f] = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a) - f'(b)).$$

Zeigen Sie, dass $I[f]$ Exaktheitsgrad 3 hat. Wie sieht die zusammengesetzte korrigierte Trapezregel aus?

Aufgabe 47 (10 Punkte)

Sei $w(x) = \sqrt{x}$ und betrachten Sie

$$I_w[f] = af(x_1)$$

für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $x_1 \in [0,1]$. Bestimmen Sie a und x_1 mit der Eigenschaft

$$I_w[f] = \int_0^1 w(x)p(x)dx, \quad \forall p \in \Pi_q,$$

wobei q der maximale Polynomgrad sei, für den derartige a, x_1 angegeben werden können.

Abgabe: Die Bearbeitung dieser Übungsaufgaben ist freiwillig. Nach Absprache mit dem zuständigen Tutor *können* die Beispiele direkt bei diesem abgegeben werden und Zusatzpunkte für die Zulassung zur Klausur bringen.