Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

13. Aufgabenblatt vom 7.7.2008

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Zur Berechnung der Quadratwurzel von positven Zahlen benutzten wohl schon die Babylonier, spätestens aber der Alexandriner *Heron* (etwa 1. Jh. n. Chr.), das folgende Verfahren: Für beliebigen reellen Startwert $x_0 > 0$ und relles $a > 0$ setze

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big).$$

(a) Zeigen Sie: das *Heron-Verfahren* ist quadratisch konvergent (gegen $\sqrt{a}$). Was passiert für negativen Startwert $x_0 < 0$?
(b) Führen Sie vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{2}$ aus. Wählen Sie dazu den Startwert $x_0 = 2$, und stellen Sie erst x_4 als Dezimalzahl dar. Schätzen Sie den Fehler ab.

Aufgabe 49 (10 Punkte)

Gegeben sei eine positive relle Zahl a. Zeigen Sie, dass $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x - ax^2,$$

genau einen Fixpunkt hat für $I = [3/(4a),1/a]$. Wie lautet dieser?
Bemerkung: In einigen Mikroprozessoren wurde so die Division von Floats implementiert.

Aufgabe 50 (10 Punkte)

Gegeben sei das nicht-lineare Gleichungssystem

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^3 + y^3 - 4 \\ x^3 - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Lösung dieses Gleichungssystems für jeden Startvektor $(x_0,y_0) \in [1,2] \times [1,2] \subset \mathbb{R}^2$ (versehen mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$) konvergiert.
(b) Führen Sie ausgehend von $(x_0,y_0) = (1,1)$ zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens durch.

Aufgabe 51 (10 Punkte)

Gegeben eine Abbildung $\phi : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, welche die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes auf I mit Kontraktionskonstante L erfülle. Der Fixpunkt x^* liege im Inneren von I, das heisst, es existiere ein $\rho > 0$ mit $[x^* - \rho, x^* + \rho] \subset I$. Beispielsweise wegen Rundungsfehler gehe man davon aus, dass die Fixpunktiteration $x_k = \phi(x_{k-1})$ nicht exakt ausgewertet werden kann. Statt $\phi(x)$ verwendet man den gestörten Funktionswert

$$\phi(x) + \delta(x),$$

wobei eine positive Konstante δ existiere mit $|\delta(x)| < \delta$, $\forall x \in I$. Man betrachte also die gestörte Folge gegeben durch

$$\tilde{x}_0 = x_0, \quad \tilde{x}_k = \phi(\tilde{x}_{k-1}) + \delta(\tilde{x}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Unter der Voraussetzung, dass $\rho_0 := \rho - \frac{\delta}{1-L} \geq 0$ und $|x^* - x_0| \leq \rho_0$, zeige man:

$$\tilde{x}_k \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$$

sowie

$$|\tilde{x}_k - x^*| \leq \frac{\delta}{1-L} + L^k(\rho_0 - \frac{\delta}{1-L}),$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.