Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

Allgemeines Übungsblatt vom 9.7.2008

Aufgabe 1

Man betrachte erneut das Kartenspiel Skat (siehe Aufgabe 8 am 2. Aufgabenblatt der Übung). Man berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

1. Ein Spieler erhält alle Kreuz. (Erg.: $3 \times \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{10}} = \frac{3}{233740} \simeq 1{,}28 \times 10^{-5}$)
2. Ein Spieler erhält alle Kreuz und alle Buben. (Erg.: 0)
3. Spieler A erhält Karten von höchstens drei Farben. (Erg.: $4 \times \frac{\binom{24}{10}}{\binom{32}{10}} = \frac{7106}{58435} \simeq 0{,}122$)
4. Zwei Karten derselben Farbe liegen im Skat. (Erg.: 7/31)

Aufgabe 2

Bei einem medizinischen Test auf das Vorliegen einer bestimmten Krankheit unterscheidet man die folgenden Werte: Die *Sensitivität* des Testes gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Test ein positives Ergebnis liefert, wenn der Patient tatsächlich die Krankheit aufweist. Die *Spezifität* hingegen gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Testergebnis negativ ist, und der Patient die Krankheit nicht hat. Darüberhinaus gibt die *Prävalenz* die relative Häufigkeit des Auftretens der Krankheit unter der getesteten Personengruppe an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Patient tatsächlich die Krankheit aufweist, wenn der Patient aus einer Hochrisikogruppe (Prävalenz r_1) bzw. aus der Gesamtbevölkerung (Prävalenz r_2) gewählt wurde, siehe die Tabelle. Wie hoch müsste die Spezifität sein, damit, unter Verwendung der Prävalenz r_2, ein Patient mit Wahrscheinlichkeit 0,9 tatsächlich Träger der Krankheit ist, wenn der Test positiv ist?

Sensitivität	0,999
Spezifität	0,998
Prävalenz r_1	0,01
Prävalenz r_2	0,00072

Tabelle 1: Testwerte

Bemerkung: Die verwendeten Werte für Sensitivität und Spezifität entsprechen denjenigen des *ELISA*-Tests auf HIV. Die angegebene Prävalenz r_2 entspricht dem relativen Anteil der HIV-Infizierten an der Gesamtbevölkerung Deutschlands (Schätzwert des Robert Koch Instituts).
Ergebnis: 0,83 für r_1, 0,26 für r_2. Die Spezifität müsste auf 0,99992 erhöht werden.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das folgende Glücksspiel: zu Beginn zahlen Sie dem Veranstalter einen einmaligen Einsatz von c€. Der Veranstalter wirft nun so lange mit einer fairen Münze, bis zum ersten Mal "Kopf" erscheint. Sei k die Anzahl der dazu notwendigen Versuche. Der Veranstalter zahlt Ihnen nun 2^{k-1}€aus.
(a) Was ist der *faire* Wert des Einsatzes c, d. h., bestimmen Sie c so, dass der *erwartete* Gewinn des Spieles für beide Parteien 0 ist! Empfinden Sie das Ergebnis als intuitiv überraschend?
(b) Nehmen Sie an, der Veranstalter heißt Bill Gates! Er haftet mit seinem Gesamtvermögen von 58.000.000.000$ (kann aber natürlich auch nicht mehr zahlen als das). Was ist nun der faire Einsatz, wenn man die Obergrenze der Zahlungsfähigkeit von Herrn Gates in Betracht zieht?
Ergebnis: (b) $c \simeq 17{,}166$\$ ist fair.
Bemerkung: Dieses "Spiel" hat als *St. Petersburger-Paradoxon* im 18. Jh. für grundlegende Verwirrung gesorgt (da der theoretische Wert unter (a) völlig abweicht von der intuitiven Einschätzung des Spiels). Eine alternative Lösungsmöglichkeit zu der in (b) vorgestellten Erklärung hat Daniel Bernoulli 1738 unter Verwendung so genannter *Nutzenfunktionen* vorgestellt.

Aufgabe 4

Die Montagezeit von Schaltelementen sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable. Bekannt sei, dass im Mittel fünf Schaltelemente pro Stunde montiert werden.
(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Montagezeit für ein Schaltelement einen Wert von zwölf Minuten nicht übersteigt.
(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass innerhalb einer Stunde höchstens drei Schaltelemente, bzw. dass in einer Stunde fünf oder sechs Schaltelemente montiert werden können.
Ergebnis: 0,632, 0,265, 0,322.

Aufgabe 5

In der Fernsehserie *Start Trek: Deep Space Nine* sind das Dominion, die Föderation und die Cardassianer (neben anderen Völkern und Bündnissen) in einem Krieg verwickelt. In einer Schlacht treffen drei Schiffe aufeinander, ein Schiff der Föderation, ein Schiff der Cardassianer und eine Schiff der Jem'Hadar. In jeder Zeiteinheit feuert jedes Schiff einmal. Das Schiff der Föderation feuert auf das Schiff der Jem'Hadar bzw. auf das Schiff der Cardassianer, wenn das erstere bereits zerstört ist. Es trifft jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit 0,3. Umgekehrt feuert das Schiff der Jem'Hadar auf das Schiff der Föderation, und auf das Schiff der Cardassianer, falls ersteres bereits zerstört ist. Es trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,25. Die Cardassianer haben bereits so oft die Fronten gewechselt in diesem Krieg, dass sie nicht mehr wissen, wer ihr Gegner ist. Deshalb würfeln sie vor jedem Schuss einmal, und schießen auf das Föderationsschiff, wenn die gewürfelte Zahl ungerade ist, und sonst auf das Jem'Hadar-Schiff. In jedem Fall treffen auch sie mit der Wahrscheinlichkeit 0,25. Modellieren Sie diese Situation als Markovkette und geben Sie die Übergangsmatrix an!
Ergebnis: Wählen wir den Zustandsraum $S = \{FDC, DC, FC, C, F, D, \emptyset\}$, so erhalten wir

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}39375 & 0{,}21875 & 0{,}2625 & 0{,}125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5625 & 0 & 0{,}1875 & 0 & 0{,}1875 & 0{,}0625 \\ 0 & 0 & 0{,}525 & 0{,}175 & 0{,}225 & 0 & 0{,}075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Die Grenzverteilung ist übrigens: $(0; 0; 0; 0{,}52; 0{,}21; 0{,}15; 0{,}12)$.)

Aufgabe 6

Zu den drei Stützpunkten $(-2{,}12)$, $(-1{,}3)$ und $(3{,}2)$ berechne man unter Verwendung des Schemas von Newton das zugehörige Interpolationspolynom p und werte es an der Stelle $x = 1$ aus.
Ergebnis: $p(x) = 12 - 9(x + 2) + (7/4)(x + 2)(x + 1)$, $p(1) = -9/2$.

Aufgabe 7

Zu den Stützpunkten aus Aufgabe 6 werde noch $(0{,}4)$ hinzugenommen. Berechnen Sie das Interpolationspolynom q nach Newton (unter Aussnutzung der Rechnung aus Aufgabe 6) und werten Sie wieder bei $x = 1$ aus.
Ergebnis: $q(x) = p(x) - (13/12)(x + 2)(x + 1)(x - 3)$, $q(1) = 17/2$.

Aufgabe 8

Man berechne das interpolierende trigonometrische Polynom $p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix}$ zu

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	0	0	4	12	0

Ergebnis: $c_0 = 4$, $c_1 = -1 + 3i$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1 - 3i$.

Aufgabe 9

Berechnen Sie die Koeffizienten des kubischen Splines $s(x) = \sum_{j=-1}^{3} \alpha_j B_3(x - j)$ zu den Stützpunkten

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	3	4	5

mit den Hermite'schen Randbedingungen $s'(0) = s'(2) = 1$.
Ergebnis: $\alpha_{-1} = 2$, $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 6$.

Aufgabe 10

Gegeben sei die Fixpunktaufgabe

$$\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} 0{,}4\sin(x) + 0{,}4\cos(y) \\ 0{,}4\cos(x) + 0{,}4\sin(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \Phi(x_n,y_n)$ für jeden Startwert $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ gegen genau einen Fixpunkt $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert.
(b) Wieviele Iterationsschritte sind nötig für $(x_0,y_0) = (0, 0)$, um einen Fehler $< 10^{-6}$ zu gewährleisten?
(c) Formulieren Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zu Lösung der Fixpunktgleichung.
Ergebnis: $i \geq 26$ Iterationsschritte sind hinreichend.