Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Ryad Husseini

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

3. Aufgabenblatt vom 21.4.2008

Aufgabe 9 (Pólya-Urnenmodell, nach George Pólya (1887–1985)) (10 Punkte)

In einer Urne befinden sich anfangs r rote und s schwarze Kugeln. In jedem Zug wird nun eine Kugel gezogen und zusammen mit c weiteren Kugeln der gleichen Farbe zurück in die Urne gelegt, wobei $c \geq 0$ sei. Nach dem n-ten Zug befinden sich also $r + s + cn$ Kugeln in der Urne.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im n-ten Zug eine schwarze Kugel gezogen wird, falls zuvor für alle $1 \leq k \leq n-1$ im k-ten Zug eine Kugel der Farbe $F_k \in \{\text{rot}, \text{schwarz}\}$ gezogen worden ist.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten n Ziehungen jeweils im k-ten Zug, $1 \leq k \leq n$ eine Kugel der Farbe $F_k \in \{\text{rot}, \text{schwarz}\}$ gezogen wird?

c) Berechnen Sie für $s \leq k \leq r+s+cn$ die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem n-ten Zug k schwarze Kugeln in der Urne sind.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Ein unendliches Gitter bestehe aus rechtwinklig in einer Ebene angeordneten Zylinderstäben der Dicke d. Der Abstand der Stabachsen betrage a in x-Richtung sowie b in y-Richtung. Eine Kugel mit Radius r werde zufällig senkrecht von oben auf das Gitter fallengelassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel durch das Gitter fällt, ohne einen Stab zu berühren? Stellen Sie ein geeignetes Modell auf!

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Ein Frosch sitzt auf einer Leiter, die sich unendlich weit nach oben und nach unten erstreckt. Immer wenn er eine Sprosse nach oben (nach unten) steigt, wird das Wetter besser (schlechter). Jeden Tag versucht der Frosch, eine Fliege zu fangen, wobei seine Erfolgswahrscheinlichkeit 50% beträgt. Schafft er es, so steigt er abends glücklich eine Sprosse nach oben, andernfalls enttäuscht eine nach unten. Der Frosch beginnt seine Wanderung auf der Leiter am 6. Januar 1655.
Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass er nach $2n$ Tagen wieder zum ersten Mal, seitdem er gestartet ist, auf der Sprosse sitzt, auf der er gestartet ist, beträgt $2^{-2n+1}\left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right)$.

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Im Rahmen einer Studie werden Schüler befragt, ob sie schon einmal abgeschrieben haben. Um Anonymität zu gewährleisten, benutzt man das folgende Verfahren: Jeder Befragte wirft erst einmal im Geheimen für sich einen fairen Würfel. Hat er eine Eins gewürfelt, so antwortet er immer mit Nein, im Falle einer Sechs immer mit Ja. In allen anderen Fällen sagt er die Wahrheit. Wir nehmen an, dass sich alle an diese Anweisung halten. In der Umfrage antworten schließlich $\frac{2}{3}$ der Teilnehmer mit Ja .

a) Wie hoch ist der Anteil der Schüler, die schon einmal gespickt haben?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler, der in der Umfrage mit Ja geantwortet hat, tatsächlich schon einmal abgeschrieben hat?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der mit Nein geantwortet hat, wirklich noch nie abgeschrieben hat?

Abgabe: 28.4.2008, in der Vorlesungspause

Vollversammlung Bachelor

Am *Mittwoch, 23.04.2008* um *18 Uhr st.* im *kleinen Hörsaal.*

FA BACHELOR