Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Ryad Husseini

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

4. Aufgabenblatt vom 28.4.2008

Aufgabe 13 (10 Punkte)

Ein Sender (S) übermittelt das Ergebnis eines Bernoulli-Experiments mit Parameter p über eine gestörte Leitung einem Empfänger (E). Sei $p(i|j)$ die Wahrscheinlichkeit, dass (E) das Signal i empfängt, wenn (S) j gesendet hat. Wir nehmen an, dass $p(0|0) = 0,8$ sowie $p(0|1) = 0,3$.

a) Berechnen Sie für alle Kombinationen $(i|j)$ die Wahrscheinlichkeit, dass kein Übertragungsfehler aufgetreten ist, wenn i empfangen und als j interpretiert wird. Eine Abbildung $i \mapsto \varphi(i)$, die beschreibt, als was (E) das empfangene Signal i interpretiert, heißt auch Dekodierung. Welches ist die jeweils optimale Dekodierung?

b) Zu jeder Dekodierung $\varphi\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$ gibt es ein $p(\varphi)$, für das die Wahrscheinlichkeit einer falschen Dekodierung maximal wird. Bestimmen Sie $p(\varphi)$ für jedes mögliche φ.

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Einem Schokoriegel liegt anläßlich der Fußballeuropameisterschaft 2008[1] eines von $N = 42$ Bildern von Mitgliedern der deutschen Nationalmannschaft bei. Wir nehmen an, dass jedes der Bilder gleichhäufig vorkommt. Sei (X_i) eine zufällige Folge von Sammelbildchen, $X_i \in \{1, \ldots, N\}$, sowie $\Xi_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$ die Menge der unterschiedlichen Bildchen, die man nach n Zügen besitzt. Sei außerdem $T_0 = 0$ und, für $1 \le r \le N$, $T_r = \inf\{n \ge 0 | \Xi_n \text{ enthält } r \text{ unterschiedliche Bilder}\}$. $D_r = T_r - T_{r-1}$ ist also die Anzahl der Schokoriegel, die man essen mußte, um das r-te neue Bild zu bekommen. Zeigen Sie:

a) Für $r, d_1, \ldots, d_r, d \in \mathbb{N}$, $S \subset \{1, \ldots, N\}$ mit $\sharp S = r$ und $n = d_1 + \ldots + d_r$ gilt

$$P(T_{r+1} = n + d, X_{n+d} = i | D_j = d_j \text{ für } 1 \le j \le r,\ \Xi_n = S\ ) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \in S, \\ \frac{1}{N}\left(\frac{r}{N}\right)^{d-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Die Zufallsvariablen $D_1, \ldots D_N$ sind unabhängig. Außerdem ist die Zufallsvariable $D_r - 1$ geometrisch mit Parameter $1 - \frac{r-1}{N}$ verteilt.

c) Berechnen Sie die Erwartungswert sowie Varianz von T_N (also insbesondere die mittlere Zahl der Schokoriegel, die Sie essen müssen, um alle Bilder zu haben).

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Ein Zeitschriftenverlag startet eine Marketingaktion für eine Musikzeitschrift, bei der den ersten 5000 Bestellern eines Probeabonnements eine von zwei aktuellen CDs erhalten sollen. Die Kunden können dabei ihre Wunsch-CD auf dem Bestellzettel vermerken. Beide CDs sind gleich populär. Berechnen Sie, wieviele Exemplare der beiden CDs auf Lager sein müssen, damit die ersten 5000 Besteller mit 99%-iger Sicherheit ihre Wunsch-CD sofort erhalten.

Programmieraufgabe 1 (erfolgreiche Abgabe verpflichtend!)

Sei $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment: Wähle gleichverteilt ein Element (x, y) aus $\Omega = \{0, \ldots, N\} \times \{0, \ldots, N\}$. Die Zufallsvariable Z sei nun 1, falls $x^2 + y^2 \le N^2$, andernfalls sei Z gleich 0. Schreiben Sie eine Routine, die den Erwartungswert und die Varianz von Z berechnet.

C stellt in der `stdlib` die Funktion `rand()` zur Verfügung, die zufällig einen Integer aus 0, ...,`RAND_MAX` zurück gibt. Hier ist die vordefinierte Konstante `RAND_MAX` üblicherweise gleich 32767.[2] Schreiben Sie eine Routine, die das obige Zufallsexperiment k-mal durchführt und Mittelwert sowie Varianz ausgibt.

Führen Sie k Versuche durch, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit p der Mittelwert der Simulation auf 3 bzw. 6 Nachkommastellen genau ist! Geben Sie k und das Ergebnis an für p = 0.90, p = 0.95 sowie p = 0.99.

Abgabe: 5.5.2008, in der Vorlesungspause

[1] Alternativ kann man natürlich auch versuchen, ein vollständiges Panini-Album zu bekommen, hier ist für die Fußball-EM 2008 $N = 535$.

[2] Ist bei Ihnen `RAND_MAX` sehr viel größer als dieser Wert, so sollten Sie die Anzahl der Zufallszahlen geeignet verkleinen.