Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

6. Aufgabenblatt vom 19.5.2008

Aufgabe 20 (10 Punkte)

In Anlehnung an das Bonner Wettermodell der Vorlesung modellieren wir das Wetter (an einem Tag) als Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{\text{“sonnig”}, \text{“bewölkt”}, \text{“regnerisch”}\}$. Hierzu nehmen wir optimistischerweise die folgende Übergangsmatrix an:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Am Dienstag, 13. Mai 2008, war das Wetter sonnig. Berechnen Sie, ausgehend vom obigen Modell, die Verteilung des Wetters am Dienstag, 26. August 2008, also die Wahrscheinlichkeiten, dass das Wetter an diesem Tag sonnig, bewölkt oder regnerisch sein wird! (Hinweis: Zwischen dem 13. Mai und dem 26. August vergehen 105 Tage. Zur Berechnung von $\boldsymbol{P}^{105}$ empfiehlt es sich, die Matrix zu diagonalisieren.)

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Seien die Zufallsvariablen Y_n gegeben als Ergebnisse eines Bernoulliexperiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Das heißt, die Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sind unabhängig voneinander und nehmen die Werte 1 mit Wahrscheinlichkeit p und 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ an, $0 \leq p \leq 1$. Man betrachte die Zufallsgrößen

$$X_n = 2Y_n + Y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass $(X_1, X_2, \ldots)$ eine Markov-Kette definiert und bestimme die Übergangsmatrix.

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Drei Cowboys sind in ein Pistolengefecht verwickelt. Cowboy A trifft mit Wahrscheinlichkeit p_1, Cowboy B mit Wahrscheinlichkeit p_2 und Cowboy C mit Wahrscheinlichkeit p_3, wobei wir annehmen dass $0 < p_3 < p_2 < p_1 < 1$. Jeder getroffene Cowboy stirbt sofort. In jeder Runde schießt jeder lebende Cowboy auf den stärksten (im Sinne der Trefferwahrscheinlichkeit) lebenden Konkurrenten, alle lebenden Cowboys schießen gleichzeitig und alle Schüsse treffen unabhängig voneinander. Modellieren Sie diese Situation als Markowkette. Wählen Sie den Zustandsraum dabei so, dass sich zu jeder Zeit genau bestimmen lässt, welche Cowboys noch am Leben sind.

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Wir betrachten eine Kfz-Haftpflichtversicherung, die Versicherungsprämien nach dem folgenden *Bonus/Malus-System* bemisst.

Klasse	Jahresprämie
B_1	600 €
B_2	500 €
B_3	420 €
B_4	360 €
B_5	300 €

Ein Neukunde steigt ein in Stufe B_3. Verursacht er in einem Jahr keinen Unfall, so verbessert sich seine Bonusstufe auf die nächsthöhere. Verursacht er einen Unfall, so verschlechtert sie sich um eine Stufe, bei zwei oder mehr Unfällen verschlechtert sie sich sogar um zwei Stufen (man kann sich aber nicht über Stufe B_1 hinaus verschlechtern bzw. über Stufe B_5 hinaus verbessern). Hierbei nehmen wir an, dass der Versicherte im Durchschnitt pro Jahr 0,2 Unfälle verursacht.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Prämienzahlung im dritten Jahr. Gehen Sie dabei so vor, dass Sie eine Markovkette konstruieren, die die Prämienzahlung im jeweiligen Jahr beschreibt (oder, äquivalent dazu, die entsprechende Bonusklasse). Modellieren Sie hierbei die Anzahl der Unfälle pro Jahr als Poisson-verteilte Zufallsvariable (mit Parameter 0,2).

Abgabe: 26.5.2008, in der Vorlesungspause