Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

7. Aufgabenblatt vom 26.5.2008

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Im *Ehrenfest-Modell* betrachtet man N (nummerierte) Kugeln, welche auf zwei Urnen aufgeteilt sind. Zu jedem Zeitpunkt wird eine Kugel zufällig gewählt und der Urne, in der sich diese Kugel gerade befindet, entnommen und in die andere Urne abgelegt. Es sei X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n.
a) Stellen Sie die Übergangsmatrix der Markovkette X_n auf. Schreiben Sie die Übergangsmatrix für $N = 4$ explizit an.
b) Klassifizieren Sie die Markovkette nach Reduzibilität und Periodizität.
c) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung mit Paremetern $p = 1/2$ und N die stationäre Verteilung dieser Markovkette bildet.
(Anmerkung: Das Ehrenfest-Modell wurde vom russisch-österreichischen Physikerehepaar Tatjana und Paul Ehrenfest als pädagogisches Beispielmodell zur Erläuterung eines Phänomens der Thermodynamik eingeführt. In diesem Zusammenhang stehen die beiden Urnen für zwei, miteinander verbundene Gasbehälter, während die Kugeln für einzelne Moleküle des Gases stehen.)

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Ein Experiment werde durch eine Markovkette mit zwei Zuständen $\{r,s\}$ und der Übergangsmatrix

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

mit dem unbekannten Parameter $0 \leq p \leq 1$ beschrieben. Das Experiment wird viele Male für jeweils lange Zeit ausgeführt, und man beobachtet, dass der Ausgang in 20% der Fälle durch den Zustand r und in den restlichen 80% der Fälle durch s beschrieben wird. Bestimmen Sie den Parameter p!

Aufgabe 26 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede reversible Markovkette X_n, $n = 0, 1, \ldots$, mit Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ die folgende Bedingung erfüllt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i_0, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$ gilt

$$P(X_0 = s_{i_0}, \ldots, X_n = s_{i_n}) = P(X_0 = s_{i_n}, \ldots, X_n = s_{i_0}),$$

wenn die Anfangsverteilung gegeben ist durch die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$.
b) Ist die Ehrenfestkette aus Aufgabe 24 reversibel?

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Markovkette mit Übergangsmatrix

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $[\boldsymbol{P}^n]_{i,j} > 0$ für alle $i,j \in \{1,2,3\}$.
b) Angenommen die Kette startet im ersten Zustand. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach zwei Schritten im dritten Zustand ist.
c) Finden Sie die Grenzverteilung $\boldsymbol{\pi}$, das heißt diejenige Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ mit der Eigenschaft, dass $\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\mu}^{(0)} \boldsymbol{P}^n$ für jede Anfangsverteilung $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$.

Abgabe: 2.6.2008, in der Vorlesungspause