Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

8. Aufgabenblatt vom 2.6.2008

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Wir betrachten erneut das Ehrenfestmodell aus Aufgabe 24.
a) Zeigen Sie, dass die stationäre Verteilung der Ehrenfestkette, also die Binomialverteilung mit Parametern $p = 1/2$ und N, nicht die Grenzverteilung der Markovkette ist, d. h., zeigen Sie, dass es Anfangsverteilungen $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\mu}^{(0)}\boldsymbol{P}^n \neq \boldsymbol{\pi}$. Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{P}$ die Übergangsmatrix der Ehrenfestkette und $\boldsymbol{\pi}$ die stationäre Verteilung. Beachten Sie außerdem, dass ein Gegenbeispiel im obigen Sinne auch gegeben ist, wenn der obige Grenzwert nicht existiert. Warum ist diese Aussage nicht im Widerspruch zu den Resultaten der Vorlesung?
b) Wir modifizieren die Ehrenfestkette folgendermaßen: zu jedem Zeitpunkt n wird eine Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichket $0 < p < 1$ Kopf und sonst Zahl liefert. Im Falle von "Zahl" wird, wie beim ursprünglichen Ehrenfestmodell, eine Kugel zufällig gewählt und von der Urne, in der sich die gezogene Kugel gerade befindet, in die andere Urne gelegt. Im anderen Fall wird die Konfiguaration nicht verändert. Sei erneut X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n. Konstruieren Sie die Übergangsmatrix dieser Markovkette!
c) Finden Sie die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ der in b) konstruierten Markovkette. Ist diese Verteilung nun Grenzverteilung in dem Sinne dass $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\mu}^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi}$ für alle Anfangsverteilungen $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ gilt?

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Für irreduzible, aperiodische Markovketten wurde in der Vorlesung gezeigt, dass die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ auch Grenzverteilung im obigen Sinne ist. Das bedeutet, dass die Potenzen $\boldsymbol{P}^n$ der Übergangsmatrix gegen eine Matrix $\boldsymbol{W}$ konvergiert mit

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix},$$

in dem Sinne, dass alle Zeilen von $\boldsymbol{W}$ gleich $\boldsymbol{\pi}$ sind.
Betrachten Sie die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Markovkette mehr als eine stationäre Verteilung besitzt. Betrachten Sie den Limes von $\boldsymbol{P}^n$ für $n \to \infty$. Ist dieser Grenzwert vom oben beschriebenen Typ?

Aufgabe 30 (10 Punkte)

Eine *Warteschlange* besteht aus einer Person, die gerade bedient wird, und den Personen, die auf die Bedienung warten. Wir betrachten eine Warteschlange zu jeder Sekunde und bezeichnen mit X_n die Anzahl der darin befindlichen Personen nach n Sekunden. Hierbei gilt:

- In der Warteschlange können sich zu jedem Zeitpunkt höchstens N Personen befinden. (D.h., wenn eine Person eintrifft und sieht, dass bereits N Personen warten bzw. bedient werden, dann verlässt sie die Schlange sofort wieder, ohne sich anzustellen.)
- Innerhalb einer Sekunde wird die gerade bediente Person mit Wahrscheinlichkeit r fertig und verlässt die Warteschlange. Gleichzeitig kommt mit Wahrscheinlichkeit p eine neue Person hinzu (alle diese Ereignisse treten unabhängig voneinander ein.) (Man beachte, dass es möglich ist, dass innerhalb einer Sekunde die bediente Person fertig wird und gleichzeitig eine neue Person kommt, so dass sich die Größe der Warteschlange nicht verändert.)
- Wenn die Warteschlange leer ist, dann sind natürlich nur Neuankömmlinge möglich, wobei wir davon ausgehen, dass kein Neuankömmling noch innerhalb dieser Sekunde bedient werden kann. Wenn die Warteschlange voll ist, also bereits N Personen warten, dann kann nur die gerade bediente Person die Warteschlange verlassen, aber kein Neuankömmling hinzukommen. (Insbesondere lassen wir nicht zu, dass die gerade bediente Person fertig wird, und gleichzeitig eine neue Person hinzukommt.)

Modellieren Sie diese Situation als Markovkette und stellen Sie die Übergangsmatrix auf. Betrachten Sie ferner die totale Bedienzeit S eines Kunden, also die (zufällige) Zeit, während der ein Kunde bedient wird, sowie die (zufällige) Zeit T zwischen dem Eintreffen zweier Kunden. Bestimmen Sie die Verteilungen von S und T sowie ihre Erwartungswerte.

Aufgabe 31 (Abgabe verpflichtend!)

Simulieren Sie die Markovkette aus Aufgabe 30 (mit $N = 6$) mit Hilfe eines Computerprogrammes für verschiedene Parameter p und r und verschiedene Anfangsverteilungen $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$. Zeigen Sie dabei experimentell:

- Die Verteilung von X_n für n sehr groß hängt (fast) nicht mehr von der Anfangsverteilung ab, d. h., die Konvergenz der Verteilung zu einer Grenzverteilung unabhängig von der Anfangsverteilung lässt sich empirisch beobachten.
- Die Grenzverteilung unterscheidet sich qualitativ je nachdem $p < r$, $r < p$ oder $p = r$.

Beachten Sie die folgenden *Hinweise*:

- Wählen Sie n genügend groß (z. B. $n = 1000$), sowie eine große Zahl M (z. B. $M = 1000$) und simulieren Sie M Ausgänge von X_n. Berechnen Sie anschließend die *empirische Verteilung* von X_n. Falls n und M genügend groß sind, sollte diese empirische Verteilung, also die relativen Häufigkeiten der Zustände, die Grenzverteilung gut approximieren.
- Zur Simulation von X_n gehen Sie folgendermaßen vor: Simulieren Sie zuerst X_0 anhand der von Ihnen gewählten Anfangsverteilung $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$. Danach gehen Sie iterativ vor: gegeben ein simulierter Wert für X_k, simulieren Sie zwei Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern p und r, (d. h., simulieren Sie, ob jemand die Warteschlange verlässt oder neu hinzukommt), und bestimmen Sie X_{k+1} entsprechend.
- Die Simulation einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariable mit Parameter p kann man beispielsweise so durchführen: simulieren Sie mit einem geeigneten Zufallszahlengenerator eine (Pseudo-)Zufallszahl u nach einer Gleichverteilung auf dem Intervall [0,1]. Falls $u \leq p$, dann setzen Sie die Bernoulli-Zufallszahl 1, andernfalls 0. (Wie kann man dieses Verfahren verallgemeinern um Zufallszahlen nach der Anfangsverteilung $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ zu simulieren?)
- Wählen Sie zunächst $p = 0{,}2$ und $r = 0{,}7$, dann $p = 0{,}8$ und $r = 0{,}3$, und zuletzt $p = r = 0{,}4$. Simulieren Sie nun in jedem Fall die Grenzverteilung für die folgenden drei Anfangsverteilungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^{(0)} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\mu}^{(0)} &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\mu}^{(0)} &= \begin{bmatrix}1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

  Vergleichen Sie die Ergebnisse je nach der Wahl der Parameter sowie nach der Wahl der Anfangsverteilungen. (Geben Sie Ihre Resultate und die Beobachtungen ab.)

Es empfiehlt sich, das Programm geeignet zu strukturieren, zum Beispiel folgendermaßen.

- Eine Prozedur erhält die Parameter n, M, $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$, p und r, simuliert dann M Realisierungen der Markovkette bis zum Zeitpunkt n und gibt ein Array der Größe M zurück, das alle M simulierten Werte von X_n enthält. Beachten Sie, dass die Programmiersprache `C` die Rückgabe von Arrays nicht erlaubt. Falls Sie in dieser Programmiersprache arbeiten, könnte der Prototyp der Funktion also folgendermaßen aussehen:

```
void mc_simulate( int n, int M, const double* mub, double p, double r, double* X );
```

  wobei das Resultat in das Array `X` geschrieben wird.
- Natürlich können Sie dabei manche Teilprobleme in Subroutinen auslagern, beispielsweise die Simulation einer einzelnen Trajektorie und die Erzeugung der Zufallszahlen.
- Schreiben Sie ferner eine Funktion, die ein Array `X` nimmt, und die entsprechende empirische Verteilung berechnet (und als Array `pi` zurückgibt). Falls Sie Ihr Programm in `C` schreiben, könnte der Prototyp dieser Funktion so aussehen:

```
void empirical_distribution( int M, const double* X, double* pi );
```

Abgabe: 9.6.2008, in der Vorlesungspause