Institut für Numerische Simulation
Universität Bonn
Prof. Dr. Helmut Harbrecht
Christian Bayer

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II

9. Aufgabenblatt vom 9.6.2008

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Gegeben seien $n+1$ beliebige Knoten $x_0 < x_1 < \cdots < x_n \in \mathbb{R}$, und es seien $L_0, L_1, \ldots, L_n \in \Pi_n$ die zugehörigen Lagrange-Polynome. Zeigen Sie, dass

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Gegeben seien die Knoten $x_0 < x_1 < \cdots < x_n \in \mathbb{R}$ und die Werte $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ sowie $y_0', \ldots, y_n' \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $p \in \Pi_{2n+1}$ gibt mit

$$p(x_i) = y_i, \quad p'(x_i) = y_i', \quad i = 0, \ldots, n.$$

Zeigen Sie ferner, dass dieses Interpolationspolynom p die Darstellung

$$p = \sum_{i=0}^{n} (y_i \ell_i + y_i' \tilde{\ell}_i)$$

besitzt, wobei die Polynome ℓ_i und $\tilde{\ell}_i$, $i = 0, \ldots, n$, definiert sind durch

$$\begin{aligned} \ell_i(x) &= (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x), \\ \tilde{\ell}_i(x) &= (x - x_i)L_i^2(x). \end{aligned}$$

(p heißt *Hermite'sches Interpolationspolynom.*)

Aufgabe 34 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrange'sche Interpolationsaufgabe mit fünf Knoten $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ und den Werten $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, 4$, mit $f(x) = 2^x$. Bezeichne $p \in \Pi_4$ das entsprechende Interpolationspolynom.
a) Berechnen Sie $p(1/2)$ mittels des Schemas von Neville.
b) Bestimmen Sie p mit der Newton'schen Interpolationsformel.
c) Berechnen Sie $p(1/2)$ mittels des Horner-Schemas.

Aufgabe 35 (Abgabe verpflichtend!)

Schreiben Sie ein Computerprogramm, das zu gegebenen Stützstellen $(x_0,y_0), \ldots, (x_n,y_n)$ (mit paarweise verschiedenen Knoten) das Interpolationspolynom $p \in \Pi_n$ berechnet (unter Verwendung der Newton'schen Interpolationsformel), sowie durch das Horner-Schema auswertet.
Für $n \in \{2,4,8,16\}$ seien Knoten $x_k = k/n$, $k = 0, \ldots, n$, gegeben mit Werten $y_k = f(x_k)$. Berechnen Sie die Werte der entsprechenden Interpolationspolynome an den Stellen $(x_{k-1} + x_k)/2$, $k = 1, \ldots, n$, für die beiden Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{0,1\}, \\ 1, & x \in (0,1), \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 100(x - 1/2)^2}, \quad x \in [0,1].$$

Abgabe: 16.6.2008, in der Vorlesungspause