Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag, 13.1.2009**.

Aufgabe 1. (Lanczos-Verfahren)

Zeigen Sie, dass für symmetrische Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das Arnoldi-Verfahren mathematisch äquivalent zum Lanczos-Verfahren ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Typeinteilung von Differentialoperatoren)

Bestimmen Sie den Typ der folgenden Differentialoperatoren:

(a) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + u_{yy} - 3u_{yx} + 4u$

(b) $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + u_x$

(c) $u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} + 13u_y + 5u$

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Differenzenstern)

Zur Approximation der zweiten Ableitung einer Funktion $u \in C^6(\mathbb{R})$ verwende man die Formel

$$u''(x) \approx (\Delta_h u)(x) := -\frac{u(x-2h) - 16u(x-h) + 30u(x) - 16u(x+h) + u(x+2h)}{12h^2}.$$

Zeigen Sie, dass diese Approximation von vierter Ordnung ist, dies bedeutet,

$$|(u'' - \Delta_h u)(x)| = \mathcal{O}(h^4).$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Differenzenverfahren)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x) = r(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

mit $q(x) \geq q_0 > 0$ für $a \leq x \leq b$. Gesucht sind Näherungswerte u_i für die exakten Werte $y(x_i)$ mit $i = 1, \ldots, n$, $x_i = a + ih$ und $h := \frac{b-a}{n+1}$. Approximiert man

$$y'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ und setzt man weiter $u_0 = \alpha$ und $u_{n+1} = \beta$, so erhält man aus der Differentialgleichung ein Gleichungssystem

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$$

für den Vektor $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$.

(a) Geben Sie $\mathbf{A}$ und $\mathbf{f}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem für hinreichend kleine Schrittweiten h eindeutig lösbar ist. (**Hinweis.** Verwenden Sie den Satz von Gerschgorin.)

(10 Punkte)