Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 20.1.2009**.

Aufgabe 1. (Zentrale Differenzenquotienten)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$y'(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \qquad y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta$$

Berechnen Sie mit Hilfe von zentralen Differenzen Näherungswerte u_i für die exakten Werte $y(x)$ mit $i = 1, 2, \ldots, n$, $x = a+ih$ und $h := (b-a)/n$. Wie lautet das resultierende Gleichungssystem $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$? Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ für gerades n singulär ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Fundamentallösung)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_2}, & \text{falls } d = 3, \\ -\frac{1}{2\pi}\log\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_2, & \text{falls } d = 2, \end{cases}$$

der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{a}\}$ genügt, und dass gilt

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_2^3}, & \text{falls } d = 3, \\ -\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_2^2}, & \text{falls } d = 2. \end{cases}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Abhängigkeit von den Daten)

Für den gleichmäßig elliptischen Differentialoperator

$$(\mathcal{L}u)(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(\mathbf{x})u_{x_i,x_j}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad c(\mathbf{x}) \geq 0$$

zeige man die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Laplace-Gleichung im Kreis)

Betrachten Sie das folgende Poisson-Problem:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dabei sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis und

$$g(\cos\phi, \sin\phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi) \in C(\Gamma).$$

Zeigen Sie, dass dann in Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ gilt

$$u(x,y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi).$$

(10 Punkte)