Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag, 27.1.2009**.

Aufgabe 1. (Tensorprodukte)

Für zwei Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}], \mathbf{B} = [b_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist das Kronecker-Produkt $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ definiert durch

$$\mathbf{C} = [a_{i,j} \cdot \mathbf{B}]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\mathbf{B} & \cdots & a_{n,n}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Gleichungssytem, das bei der Diskretisierung der Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega = (0,1)^2, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

durch den 5-Punkte-Stern ensteht, sich schreiben lässt als

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{L})\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Dabei bezeichnet $h = 1/n$ die Schrittweite, $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{(n-1)}$ und

$$\mathbf{L} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

die Diskretisierung des eindimensionalen Laplace-Operators.

Zusatz. Wie lauten demnach die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Wellengleichung)

Eine in den Punkten 0 und 1 fest eingespannte Saite genügt für $t \in [0,\infty)$ der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad x \in (0,1), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $u(x,t) = U(x)\cos(\omega t)$ auf ein Eigenwertproblem $\mathcal{L}u = \lambda u$ mit einem elliptischen Operator führt. Wie sieht das durch Standard-Finite-Differenzen diskretisierte Eigenwertproblem aus und wie lauten (näherungsweise) die Eigenfrequenzen der Saite?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Mehrstellenverfahren I)

Zeigen Sie, dass die Differenzensterne

$$-\Delta_h u = \frac{1}{6h^2}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}_\star u, \qquad R_h f = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} & 1/2 & \\ 1/2 & 4 & 1/2 \\ & 1/2 & \end{bmatrix}_\star f$$

für $u \in C^6(\overline{\Omega})$ und $f \in C^4(\overline{\Omega})$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta_h u(\mathbf{x}) &= \Delta u(\mathbf{x}) + \frac{h^2}{12}\Delta^2 u(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h^4), \\ R_h f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + \frac{h^2}{12}\Delta f(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h^4), \end{aligned}$$

genügen.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Mehrstellenverfahren II)

Auf dem Würfelgebiet Ω sei die Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

gesucht. Wie können die oben definierte Sterne zur numerischen Lösung eingesetzt werden? Welche Konsistenzordung besitzt das entstehende Verfahren?

(10 Punkte)