Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag, 4.11.2008**.

Aufgabe 1. (QR-Zerlegung)

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Givens-Rotationen)

Seien $s, c \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$. Die Givens–Rotation $\mathbf{G}_{i,j} = [g_{k,l}]_{k,l=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert durch

$$\mathbf{G}_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & \mathbf{0} \\ & c & \mathbf{0} & s & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \\ & -s & \mathbf{0} & c & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

mit $g_{i,i} = g_{j,j} = c$, $g_{i,j} = s$ und $g_{j,i} = -s$. Zeigen Sie:

(a) Die Givens–Rotation ist orthogonal.

(b) Für $\mathbf{x} = [x_k]_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ sei $\mathbf{b} = [b_k]_{k=1}^n = \mathbf{G}_{i,j}\mathbf{x}$. Gilt $c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$ und $s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$, so folgt $b_j = 0$ und $b_k = x_k$, $k \neq i, j$.

(c) Wie kann mit Hilfe von Givens–Rotationen eine QR–Zerlegung bestimmt werden?
Hinweis. Wendet man nacheinander geeignete Givens–Rotationen $\mathbf{G}_{1,2}, \mathbf{G}_{1,3}, \ldots, \mathbf{G}_{1,n}$ auf einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ an, so gilt

$$\mathbf{G}_{1,n} \cdots \mathbf{G}_{1,3}, \mathbf{G}_{1,2}\mathbf{x} = \sigma \mathbf{e}_1, \quad \sigma \neq 0.$$

(d) Wie groß ist der Aufwand für eine QR–Zerlegung mit Givens–Rotationen?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Programmieraufgabe)

Abgabe innerhalb der Woche 10.11.–14.11.2008 im CIP-Pool!

Die Abgabe eines vollständigen und lauffähigen Programms bzw. Quelltextes ist verpfichtend. Eine einmalige Überarbeitung/Korrektur ist möglich.

Implementieren Sie in einer der Programmiersprachen C oder C++ eine Funktion, die die QR-Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

mittels Householder-Spiegelungen einer rechteckigen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ für feste Parameter $N \leq M$ aufstellts, wobei $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = N$ angenommen werden darf.

Man beachte hierbei, dass $\mathbf{Q}$ nicht explizit aufgestellt werden soll. Vielmehr soll die Darstellung

$$\mathbf{Q} = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{H}_i, \qquad \text{mit} \quad \mathbf{H}_i := \mathbf{I} - \tau_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T, \quad \tau_i = \frac{2}{\|\mathbf{v}_i\|_2^2},$$

wobei

$$\mathbf{v}_i = [0, 0, 0, \ldots, 0, 1, a_{i,i+1}, \ldots, a_{i,N}]^T$$

gilt, zur minimalen Speicherung ausgenutzt werden.

Testen Sie Ihr Programm anhand folgender Aufgaben:

- Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  und lösen Sie mittels dieser das linear Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für die rechte Seite

$$\mathbf{b} = [35, 34, 31, 25, 15]^T.$$

- Berechnen Sie die QR-Zerlegungen für die Matrizen

$$\mathbf{A}_N := \mathbf{I}_N + \mathbf{E}_N$$

  mit $N = 10, 100, 1000$, wobei die Einträge $e_{i,j}$ der Matrizen $\mathbf{E}_N = [e_{i,j}]$ Zufallszahlen aus dem Intervall $[0, 0.1)$ seien. Tabellieren Sie die Laufzeiten Ihres Programms.