Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Dienstag, 11.11.2008**.

Aufgabe 1. (Singulärwertzerlegung)

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T.$$

(b) Man berechne die Pseudoinverse $\mathbf{A}^+$ von $\mathbf{A}$ und bestimme die Lösung $\mathbf{x}^+$ des Minimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2$$

Warum ist $\mathbf{x}^+$ eindeutig bestimmt?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Regularisierung)

Zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sei das quadratische Tichonov-Funktional

$$T_\alpha(x) := \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

gegeben. Man zeige:

- Für jedes $\alpha > 0$ exisitiert ein eindeutig bestimmtes $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$T_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \le T_\alpha(\mathbf{x}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- x_α erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

- Ist $\mathbf{A}^+$ die Pseudoinverse von $\mathbf{A}$, dann gilt

$$\mathbf{x}_\alpha \to \mathbf{x}^+ := \mathbf{A}^+\mathbf{b} \quad \text{für} \quad \alpha \to 0.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Best-Approximation)

Zu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $n \le m$ sei die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ mit $\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ $(\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n > 0)$, $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$ und $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\mathbf{A}_k := \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

mit $k < n$ das Approximationsproblem

$$\min_{\substack{\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ \mathrm{rang}(\mathbf{B})\leq k}} \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2$$

löst und dass gilt

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Sattelpunktformulierung)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit Rang $n \leq m$ und es gelte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Normalengleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

erfüllt. Welcher Größe entspricht der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$?

(10 Punkte)