Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 18.11.2008**.

Aufgabe 1. (Invarianz des CG-Verfahrens)

Es bezeichne $\mathbf{x}_k$ die k-te Iterierte des CG-Verfahrens angewandt auf $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Zeigen Sie, dass die Iteration von der Wahl des zugrundeliegenden orthonormalen Koordinatensystems unabhängig ist: Sei $\mathbf{V} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine unitäre Matrix und wir definieren

$$\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^\star, \quad \tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{V}\mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{V}\mathbf{x}.$$

Wird das CG-Verfahren auf das Gleichungssystem $\widetilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ mit dem Startvektor $\tilde{\mathbf{x}}_0 := \mathbf{V}\mathbf{x}_0$ angewendet, so gilt

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{V}\mathbf{x}_k.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (CG-Verfahren)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch positiv definit und besitzte nur zwei verschiedene Eigenwerte. Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren nach maximal zwei Iterationen die exakte Lösung berechnet. Unter welchen Zusatzvoraussetzungen liegt Konvergenz im ersten Schritt vor, falls $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gewählt wird?

Hinweis. Verwenden Sie ein Koordinatensystem, in dem die Basisvektoren die Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind (dies ist nach obiger Aufgabe zulässig).

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Programmieraufgabe)

Abgabe innerhalb der Woche 24.11.–28.11.2008 im CIP-Pool!
Implementieren Sie das CG-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv (semi-)definit, wobei die Startnäherung stets der Nullvektor $\mathbf{x}_0 := \mathbf{0}$ sei.

- Prüfen Sie, ob das CG-Verfahren für die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} -13 \\ 8 \\ 3 \\ -8 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

  anwendbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösung an.

- Für $n = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, \ldots$ bestimmen Sie die Lösung der Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{A}_n := [a_{i,j}]$ mit

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 2, \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \\ a_{i,i-1} &= -1, \text{ für alle } i = 2, \ldots, n \\ a_{i,i+1} &= -1, \text{ für alle } i = 1, \ldots, n-1 \\ a_{i,j} &= 0 \text{ sonst,} \end{aligned}$$

  und $\mathbf{b}_n := [b_i]$ mit

$$b_i = 1 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

  - Wieviele Iterationsschritte benötigt das Verfahren jeweils?
  - Wie verhält sich die Kondition der Matrizen $\mathbf{A}_n$?

Hinweis. Beachten Sie, dass Sie für die Durchführung eines CG-Iterationsschritts nur die Operation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ benötigen und nicht explizit auf die Matrix $\mathbf{A}$ zugreifen müssen.