Einführung in die Numerik

Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. H. Harbrecht
Dr. M.A. Schweitzer

universitätbonn

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag, 25.11.2008**.

Aufgabe 1. (Tschebyscheff-Polynome)

Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichne T_k das k-te Tschebyscheff-Polynome

$$T_k(t) = \begin{cases} \cos(k \arccos t), & |t| \leq 1 \\ \frac{1}{2}\{(t + \sqrt{t^2 - 1})^k + (t + \sqrt{t^2 - 1})^{-k}\}, & |t| > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt die Rekursionsformel:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x,$$
$$T_{k+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}, \quad k > 0.$$

(b) Die Tschebyscheff-Polynome sind orthogonal bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

(c) T_k besitzt in $[-1, 1]$ $k + 1$ Extremalstellen vom Betrag 1 mit alternierenden Vorzeichen.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. (Armijo-Bedingung)

Sei $f(x) = \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit, eine quadratische Funktion. Weiter sei $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung von f im Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und

$$\sigma^* = \operatorname*{argmin}_{\sigma \geq 0} f(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{s})$$

bezeichne die durch die Minimierungsregel gelieferte Schrittweite. Zeigen Sie, dass $\sigma = \sigma^*$ für alle $\gamma \in (0, 1/2]$ der Armijo-Bedingung

$$f(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{s}) - f(\mathbf{x}) \leq \sigma\gamma\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{s}$$

genügt, für alle $\gamma > 1/2$ aber nicht.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Gradientenverfahren)

Für $a > 1$ definieren wir die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + a x_2^2$.

(a) Bestimmen Sie für den Startpunkt $\mathbf{x}_0 = (a, 1)^T$ die durch das Gradientenverfahren mit der Minimierungsregel

$$f(\mathbf{x}_k + \sigma_k \mathbf{s}_k) = \min_{\sigma \geq 0} f(\mathbf{x}_k + \sigma \mathbf{s}_k)$$

erzeugte Folge $\{\mathbf{x}_k\}_{k>0}$ und zeigen Sie, dass für alle $k \geq 0$ gilt:

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| = \frac{a-1}{a+1} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|,$$
$$f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 \big(f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*)\big),$$

wobei $\mathbf{x}^* = 0$ das globale Minimum von f ist.

(b) Drücken Sie die Konvergenzrate $\frac{a-1}{a+1}$ mit Hilfe der Konditionszahl

$$\kappa\big(\nabla^2 f(\mathbf{x})\big) = \frac{\lambda_{\max}\big(\nabla^2 f(\mathbf{x})\big)}{\lambda_{\min}\big(\nabla^2 f(\mathbf{x})\big)}$$

der Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ aus. Wie verhält sich die Konvergenzrate für $\kappa\big(\nabla^2 f(\mathbf{x})\big) \to \infty$?

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Gauß-Newton-Verfahren)

Betrachtet wird die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ \lambda x^2 + x - 1 \end{bmatrix}$$

und das zugehörige Minimierungsproblem

$$\phi(x) = \|F(x)\|_2^2 \to \min.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $\lambda \in (-\infty, 1)$ ist $x = 0$ ein lokales Minimum von $\phi(x)$ und für $\lambda < 7/16$ sogar das einzige.

(b) Formulieren Sie das Gauß-Newton-Verfahren als Fixpunktverfahren $x_{k+1} = g(x_k)$. Für $\lambda < -1$ ist die Lösung $x = 0$ ein abstoßender Fixpunkt, das heißt, in einer Umgebung um 0 gilt $|x_{k+1} - 0| \geq |x_k - 0|$ für alle $x_k \neq 0$.

(c) Für $|\lambda| < 1$ ist das Gauß-Newton-Verfahren konvergent. Welche Konvergenzordung liegt in diesem Fall vor?

(10 Punkte)